Daniel Scholz · www.taramath.de · daniel@taramath.de · 25. Mai 2016

Anfangswertprobleme

Unter einem Anfangswertproblem verstehen wir eine gewöhnliche Differenzialgleichung, dessen Lösung eine Funktion der Zeit ist, welche zum Startzeitpunkt durch einen Anfangswert bekannt ist. Wie wir in diesem Kapitel erfahren werden, treten derartige Probleme in zahlreichen Anwendungen diverser Disziplinen auf. Wir beginnen mit einer einleitenden Definition von Anfangswertproblemen in Abschn. 1 und zeigen, wie sich Probleme höherer Ordnungen stets auf Probleme erster Ordnung reduzieren lassen (Abschn. 2). Neben theoretischen Aussagen zur Lösbarkeit von Anfangswertproblemen in Abschn. 3 folgen einige Notationen und Begriffe zur Definition der Evolution in Abschn. 4. Anschließend lernen wir in Abschn. 5 mit dem Euler-Verfahren eine sehr einfache Methode zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen kennen. Verfahren mit deutlich besseren Konvergenzeigenschaften sind Runge-Kutta-Verfahren, welche in Abschn. 6 beschrieben werden. Runge-Kutte-Verfahren können dahingehend optimiert werden, indem eine adaptive Schrittweitensteuerung eingeführt wird (Abschn. 7). Schließlich präsentieren wir in Abschn. 8 eine Reihe von Anfangswertproblemen praxisnaher Beispiele.

1 Grundlagen

Zunächst definieren wir das grundlegende mathematische Problem, welches wir im Folgenden theoretisch analysieren sowie numerisch lösen werden:

Definition 1.1 *Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ein* ***Anfangswertproblem*** *besteht darin, die Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der Differenzialgleichung*

$$x'(t) \;=\; f(x(t)) \qquad \text{mit} \qquad x(0) \;=\; z \tag{1}$$

auf einem Intervall $[0, T]$ zu bestimmen, wobei $z \in \mathbb{R}^n$ ein bekannter ***Anfangswert*** *des Problems ist.*

Es handelt sich bei Gl. (1) um eine explizite und autonome gewöhnliche Differenzialgleichung erster Ordnung, dessen Lösung $x(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ durch den Anfangswert z gegeben ist.

Beispiel 1.1 *Gegeben sei das Anfangswertproblem*

$$x'(t) \;=\; \Big(-x_2(t),\; x_1(t)\Big) \qquad \text{mit} \qquad x(0) \;=\; (1,\, 0).$$

Mit der Schreibweise aus Definition 1.1 gilt $x'(t) = f(x(t))$ unter Verwendung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x_1,\, x_2) \;=\; (-x_2,\, x_1).$$

Es lässt sich leicht prüfen, dass

$$x(t) \;=\; \Big(x_1(t),\; x_2(t)\Big) \;=\; \Big(\cos(t),\; \sin(t)\Big)$$

eine exakte Lösung des Problems ist. Abb. 1a zeigt die Funktion $x_1(t) = \cos(t)$ sowie $x_2(t) = \sin(t)$ gemeinsam in einem Plot für $t \in [0, 4\pi]$.

In diesem Beispiel handelt es sich um einen zweidimensionalen Fall, sodass sich die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ als Vektorfeld darstellen lässt (Abb. 1b). Die Lösung $x(t)$ kann daher auch als ***Lösungskurve*** *oder* ***Trajektorie*** *in einen zweidimensionalen Plot gezeichnet werden (Abb. 1c), wobei damit die zeitlichen Informationen verloren gehen. Da $x(t)$ die Differenzialgleichung $x'(t) = f(x(t))$ löst, ist das Vektorfeld zur Funktion $f(x_1, x_2)$ in jedem Punkt tangential zur Lösungskurve.*

Anders als in Beispiel 1.1 lassen sich die exakten Lösungen eines Anfangswertproblems häufig gar nicht bestimmen, sodass numerische Verfahren zum Einsatz kommen.

Aufgabe 1.1 Zeige, dass $x(t) = 3 \cdot \exp(-2 \cdot t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) \;=\; -2 \cdot x(t) \qquad \text{mit} \qquad x(0) \;=\; 3$$

ist.

Häufig wird die sehr kompakte Schreibweise (1) eines Anfangswertproblems auch komponentenweise angegeben. Wir erhalten dann die Form

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1\Big(x_1(t),\, \dots,\, x_n(t)\Big) \\ &\;\vdots \\ x_n'(t) &= f_n\Big(x_1(t),\, \dots,\, x_n(t)\Big) \end{aligned}$$