Daniel Scholz · www.taramath.de · daniel@taramath.de · 25. Mai 2016

Eigenwertprobleme

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der numerischen Berechnung von Eigenwerten sowie Eigenvektoren. Obwohl die meisten hier vorgestellten Verfahren allgemein gültig sind, beschränken wir uns bewusst auf symmetrische Matrizen, denn sämtliche Eigenwerte von symmetrischen Matrizen sind reell. Wir beginnen zunächst in Abschn. 1 mit den grundlegenden Definitionen und Eigenschaften von Eigenwerten, bevor wir anschließend in Abschn. 2 ein einfaches Verfahren der Vektoriteration zur Bestimmung des jeweils betragsmäßig größten Eigenwertes einer Matrix vorstellen. Für praktische Anwendungsfälle ist die Vektoriteration eher ungeeignet, sie liefert jedoch einen ersten Eindruck zur numerischen Berechnung von Eigenwerten. Anschließend präsentieren wir in Abschn. 3 das QR-Verfahren in seiner Grundversion und damit eine (zunächst noch wenig effiziente) Methode zur Bestimmung aller Eigenwerte einer symmetrischen Matrix. Die folgenden vier Abschnitte dienen der Verbesserung des QR-Verfahrens: Wir lernen die Hessenberg-Zerlegung kennen (Abschn. 4), wir stellen ein effizientes Verfahren zur Berechnung einer QR-Zerlegung von Hessenberg-Matrizen vor (Abschn. 5), wir diskutieren eine Reduktion der Komplexität des QR-Verfahrens unter Verwendung von Hessenberg-Matrizen (Abschn. 6), und wir zeigen, wie die Konvergenzgeschwindigkeit maßgeblich durch die Verwendung einer geeigneten Shift-Strategie verbessert werden kann (Abschn. 7). Eigenwertprobleme treten in einer Reihe von physikalischen Anwendungen auf, insbesondere als Folge der Diskretisierung bestimmter Fragestellungen. Als Beispiel hierzu stellen wir abschließend in Abschn. 8 die numerische Berechnung von Eigenfunktionen eines schwingenden Systems vor.

1 Grundlagen

Eigenwerte einer Matrix charakterisieren die zugehörige lineare Abbildung und lassen sich für komplexe Matrizen ebenso definieren wie für reelle Matrizen. Ganz bewusst stellen wir in diesem Kapitel jedoch alle Ergebnisse nur für den reellen Fall vor, obwohl fast alle Ergebnisse auch für komplexe Matrizen gelten.

Viele der in diesem Kapitel vorgestellen Inhalte können neben Lehrbüchern wie Hanke-Bourgeois (2009) insbesondere auch in Watkins (2008) nachgelesen und vertieft werden.

Definition 1.1 *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Eine Zahl λ heißt **Eigenwert** von A, falls es einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt, sodass*

$$A \cdot x \;=\; \lambda \cdot x$$

*gilt. Ein solcher Vektor x heißt **Eigenvektor** von A zum Eigenwert λ.*

Die folgende Aussage liefert schließlich einen ersten Ansatz zur Berechnung von Eigenwerten:

Satz 1.1 *Die Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind die Lösungen der Gleichung*

$$\det(A - \lambda \cdot I_n) \;=\; 0, \tag{1}$$

*dabei ist $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Insbesondere ist die linke Seite ein Polynom vom Grad n mit λ als Unbekannte, welches als **charakteristisches Polynom** bezeichnet wird.*

Aus der linearen Algebra wissen wir folglich, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ höchstens n Eigenwerte besitzt, welche im Allgemeinen komplex sein können. Weiterhin ist das Ergebnis zur numerischen Berechnung der Eigenwerte nicht zweckmäßig, da alleine die Bestimmung des charakteristischen Polynoms sehr aufwendig ist. Einen Spezialfall liefern jedoch Dreiecksmatrizen, denn für obere oder untere Dreiecksmatrizen $A = (a_{i,j})$ gilt

$$\det(A - \lambda \cdot I_n) \;=\; (a_{1,1} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{n,n} - \lambda).$$

Genauer erhalten wir das folgende Ergebnis:

Lemma 1.2 *Sei $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere oder untere Dreiecksmatrix mit $a_{k,k} \neq 0$ für $k = 1, \ldots, n$. Dann sind die Diagonalelemente*

$$\lambda_1 \;=\; a_{1,1} \qquad \text{bis} \qquad \lambda_n \;=\; a_{n,n}$$

die Eigenwerte von A.

Dieses Ergebnis ist aufgrund der folgenden Aussage von großem Interesse: