Daniel Scholz · www.taramath.de · daniel@taramath.de · 25. Mai 2016

Diskrete Fourier-Transformation

In vielen technischen Anwendungen werden Signale durch Sensoren zeitlich aufgezeichnet (Zeitbereich), um sie anschließend zu analysieren und das Signal als Summe von periodischen Funktionen mit unterschiedlichen Frequenzen darzustellen (Frequenzbereich). Ein Mikrofon nimmt beispielsweise ein Drucksignal auf, welches als eine Überlagerung von Tönen bzw. Schallwellen (jeweils mit einer charakteristischen Frequenz) angesehen werden kann. In diesem Kapitel erarbeiten wir numerische Verfahren, mit deren Hilfe gegebene Signale oder Messwerte durch eine Summe von Kosinus- und/oder Sinusfunktionen interpoliert werden können. Wir beginnen mit der diskreten Kosinustransformation in Abschn. 1 und beschäftigen uns als Anwendung mit der Kompression von Audiodaten. Anschließend untersuchen wir die zweidimensionale diskrete Kosinustransformation und diskutieren als Anwendung die Kompression von Bilddaten (Abschn. 2). Nachfolgend stellen wir in Abschn. 3 die diskrete Fourier-Transformation unter Verwendung von komplexen Zahlen vor und skizzieren das Verfahren der schnellen Fourier-Transformation, bevor wir als Spezialfall die reelle diskrete Fourier-Transformation herleiten. Schließlich geben wir in Abschn. 4 wieder eine zweidimensionale Version der Fourier-Transformation an und zeigen die Bedeutung der Fourier-Transformation in der Optik anhand von Beugungsbildern, welche als Intensitätsverteilung der zweidimensionalen diskreten Fourier-Transformation interpretiert werden können.

1 Diskrete Kosinustransformation

Das Ziel der diskreten Kosinustransformation ist eine Interpolation von gegebenen Messwerten oder Stützwerten durch Kosinusfunktionen unter Verwendung von äquidistanten Stützstellen auf dem Intervall $[0, \pi]$. Obwohl es auch weitere Möglichkeiten zur Festlegung der Stützstellen gibt, werden wir stets folgende Definition verwenden:

Definition 1.1 *Gegeben seien die n Stützstellen*

$$x_i \;=\; \left(i + \tfrac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{n} \qquad \text{für } i = 0, \ldots, n-1$$

sowie zugehörige Stützwerte $y_i \in \mathbb{R}$. Weiterhin definieren wir die Funktion

$$g(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \cos(k \cdot x) \qquad \text{mit } a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Die ***diskrete Kosinustransformation*** *besteht darin, die Koeffizienten a_k so zu wählen, dass die* ***Interpolationsaufgabe***

$$g(x_i) \;=\; y_i \qquad \text{für alle } i = 0, \ldots, n-1$$

erfüllt wird.

Zunächst bemerken wir, dass $g(x)$ eine periodische Funktion mit einer Periode von 2π ist. Die einzelnen Summanden $a_k \cdot \cos(k \cdot x)$ haben dabei jeweils die ***Frequenz*** k und die ***Amplitude*** a_k. Wie wir später sehen werden, sind in praktischen Anwendungsfällen viele Amplituden vergleichsweise so klein, dass sie auch ignoriert werden können.

Bevor wir aber Anwendungsbeispiele der Interpolationsaufgabe zur diskreten Kosinustransformation vorstellen werden, beantworten wir zunächst einige übliche Fragen der numerischen Mathematik, nämlich:

(1) Existiert für beliebige Stützwerte stets eine (eindeutige) Lösung?

(2) Wie kann eine bzw. die Lösung numerisch berechnet werden?

(3) Wie hoch ist der Rechenaufwand in Abhängigkeit der Anzahl n der Stützstellen?

(4) Angenommen, es gilt $y_i = f(x_i)$ für eine gegebene Funktion $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$. Konvergiert dann $g(x)$ gegen $f(x)$ für $n \to \infty$?

Um die ersten beiden Fragen zu beantworten, überlegen wir uns zunächst, was die Interpolationsaufgabe genau bedeutet. Wenn wir die Stützstellen in die Funktion $g(x)$ einsetzen, erhalten wir ausgeschrieben

$$\begin{aligned}
g(x_0) &= a_0 \cdot \cos\Big(0 \cdot x_0\Big) + \ldots + a_{n-1} \cdot \cos\Big((n-1) \cdot x_0\Big), \\
&\;\vdots \\
g(x_{n-1}) &= a_0 \cdot \cos\Big(0 \cdot x_{n-1}\Big) + \ldots + a_{n-1} \cdot \cos\Big((n-1) \cdot x_{n-1}\Big).
\end{aligned}$$