Daniel Scholz · www.taramath.de · daniel@taramath.de · 25. Mai 2016

Numerische Integration

Bei der numerischen Integration von reellen Funktionen wird das exakte Integral meist durch eine gewichtete Summe von Funktionswerten approximiert. Dabei ist man sowohl daran interessiert, den Integrationsfehler zu minimieren, also auch die Anzahl der Funktionsauswertungen möglichst klein zu halten. Wir stellen in diesem Kapitel unterschiedliche Verfahren vor, welche beide Ziele ausreichend gut erfüllen. In Abschn. 1 schaffen wir zunächst einige Grundlagen, indem wir das Polynom-Interpolationsproblem definieren sowie Lösungsverfahren vorstellen. Anschließend stellen wir erste Verfahren zur numerischen Integration vor, nämlich die Newton-Cotes-Quadraturen in Abschn. 2. Diese Verfahren haben den Vorteil, dass Polynome bis zu einem gewünschten Grad exakt integriert werden können. Zudem können Newton-Cotes-Quadraturen niedriger Ordnung auch dazu genutzt werden, um zusammengesetzte Quadraturen wie beispielsweise die zusammengesetzte Trapezregel herzuleiten (Abschn. 3). Abschließend untersuchen wir in Abschn. 4 das Romberg-Verfahren unter Verwendung der Ergebnisse aus Abschn. 3. Anhand eines Beispiels werden zudem die guten Konvergenzeigenschaften des Romberg-Verfahrens demonstriert und mit den zusammengesetzten Quadraturen verglichen.

1 Polynominterpolation

Bevor wir die Interpolationsaufgabe definieren, wiederholen wir kurz einige Grundlagen der linearen Algebra: Ein ***Polynom*** vom Grad n ist eine Funktion der Form

$$p(x) \;=\; a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k \qquad (1)$$

mit (im Folgenden stets reellen) Koeffizienten a_0 bis a_n. Mit Π_n bezeichnen wir den Raum aller Polynome vom Grad kleiner gleich n, und aus der linearen Algebra sei bekannt, dass Π_n einen Vektorraum der Dimension $n+1$ bildet. Mit dieser kleinen Wiederholung folgt nun die Definition der Interpolationsaufgabe:

Definition 1.1 *Gegeben seien $n+1$ paarweise verschiedene* ***Stützstellen***

$$x_k \;\in\; \mathbb{R} \qquad \text{für } k = 0, \ldots, n$$

sowie die zugehörigen ***Stützwerte*** *$y_k \in \mathbb{R}$. Die* ***Interpolationsaufgabe*** *besteht darin, ein Polynom vom Grad kleiner gleich n zu finden, sodass*

$$p(x_k) \;=\; y_k \qquad \text{für alle } k = 0, \ldots, n$$

erfüllt wird.

Aufgabe 1.1 Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = -2$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ sowie die Stützwerte $y_0 = 4$, $y_1 = 0$ und $y_2 = 9$. Errate eine Lösung der zugehörigen Interpolationsaufgabe.

Erstaunlicherweise lässt sich vergleichsweise einfach eine Lösung der Interpolationsaufgabe angeben, welche wir nun herleiten werden, s. auch Hanke-Bourgeois (2009) oder Kress (1998):

Herleitung *Zu gegebenen Stützstellen x_0 bis x_n definieren wir die* ***Lagrange-Polynome*** *als*

$$\ell_k(x) \;=\; \left(\prod_{j=0}^{k-1} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) \cdot \left(\prod_{j=k+1}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) \tag{2}$$

für $k = 0, \ldots, n$ und stellen fest, dass $\ell_k(x)$ für alle $k = 0, \ldots, n$ ein Polynom vom Grad n ist. Weiterhin gilt

$$\ell_k(x_i) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq i \\ 1 & \text{für } k = i \end{cases} .$$

Somit lässt sich leicht einsehen, dass

$$p(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \ell_k(x) \tag{3}$$

eine Lösung der Interpolationsaufgabe in der ***Lagrange-Darstellung*** *ist. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass das Lösungspolynom in der Lagrange-Darstellung nicht in der unter Gl. (1) präsentierten Form vorliegt. Um diese zu erreichen, müssten alle Terme der Lagrange-Darstellung ausmultipliziert werden.*