Daniel Scholz · www.taramath.de · daniel@taramath.de · 25. Mai 2016

Lineare Gleichungssysteme

Wir wissen bereits, dass ein lineares Gleichungssystem genau dann eindeutig lösbar ist, wenn die zugehörige Matrix regulär ist. In diesem Kapitel lernen wir unterschiedliche Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen mit quadratischen Matrizen kennen. In Abschn. 1 untersuchen wir den Spezialfall von Dreiecksmatrizen, welche effizient durch Vorwärts- bzw. Rückwärtselimination gelöst werden können. Ein Verfahren für allgemeine Matrizen ist das Gauß-Verfahren, welches in Abschn. 2 diskutiert wird. In Abschn. 3 bis Abschn. 5 analysieren wir Matrixfaktorisierungen, welche ebenfalls zur Lösung von Gleichungssystemen verwendet werden können. Es folgt in Abschn. 6 ein weiterer Spezialfall, nämlich das Lösen von Gleichungssystemen mit Tridiagonalmatrizen. Wir werden sehen, dass derartige Systeme besonders effizient gelöst werden können. Da in vielen Anwendungsfällen häufig sehr große Gleichungssysteme gelöst werden müssen, können diese aufgrund des hohen Rechenaufwands ggf. nicht mehr exakt gelöst werden. In Abschn. 7 und Abschn. 8 präsentieren wir daher iterative Lösungsverfahren, welche die exakte Lösung unter Umständen nur approximieren, dafür allerdings deutlich effizienter sind als beispielsweise die Faktorisierungsverfahren zuvor. Schließlich fassen wir in Abschn. 9 nochmals zusammen, unter welchen Umständen welches Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems verwendet werden sollte.

1 Dreiecksmatrizen

Wir untersuchen zunächst die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

$$A \cdot x \;=\; b$$

mit Dreiecksmatrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, welche wir zunächst definieren:

Definition 1.1 *Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt* ***untere Dreiecksmatrix****, falls $a_{i,j} = 0$ für alle $j > i$. A heißt* ***obere Dreiecksmatrix****, falls $a_{i,j} = 0$ für alle $j < i$.*

Eine Dreiecksmatrix heißt ***normiert****, falls $a_{k,k} = 1$ für $k = 1, \ldots, n$.*

Als Folgerung ergibt sich direkt, dass eine $(n \times n)$-Dreiecksmatrix genau dann regulär ist, falls $a_{k,k} \neq 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$ gilt, da die Spalten bzw. Zeilen in diesem Falle linear unabhängig sind.

Aufgabe 1.1 Zeige, dass die Multiplikation von unteren Dreiecksmatrizen wieder eine untere Dreiecksmatrix ergibt. Ist die Multiplikation von zwei normierten unteren Dreiecksmatrizen auch eine normierte Dreiecksmatrix? Gelten die Ergebnisse auch für obere Dreiecksmatrizen?

Lineare Gleichungssysteme mit Dreiecksmatrizen lassen sich sehr einfach lösen, wie die folgenden beiden Ergebnisse zeigen:

Satz 1.1 (Vorwärtselimination) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine untere Dreiecksmatrix mit $a_{k,k} \neq 0$ für $k = 1, \ldots, n$ und sei $b \in \mathbb{R}^n$. Dann lässt sich die Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ durch*

$$x_k = \frac{1}{a_{k,k}} \cdot \left(b_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_{k,i} \cdot x_i \right) \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n \tag{1}$$

bestimmen.

Eine ähnliche Aussage gilt auch für obere Dreiecksmatrizen:

Satz 1.2 (Rückwärtselimination) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix mit $a_{k,k} \neq 0$ für $k = 1, \ldots, n$ und sei $b \in \mathbb{R}^n$. Dann lässt sich die Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ (rückwärts) durch*

$$x_k = \frac{1}{a_{k,k}} \cdot \left(b_k - \sum_{i=k+1}^{n} a_{k,i} \cdot x_i \right) \qquad \text{für } k = n, \ldots, 1 \tag{2}$$

bestimmen.

Die Komplexität der Vorwärts- bzw. Rückwärtselimination zur Lösung eines linea-