Nichtlineare Gleichungssysteme

In diesem Kapitel untersuchen wir eine der wichtigsten Grundlagen vieler Algorithmen der numerischen Mathematik, nämlich iterative Verfahren zur Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen. Wir beginnen in Abschn. 1 mit der Fixpunktiteration, welche uns schließlich zum bedeutenden Banach'schen Fixpunktsatz führt (Abschn. 2). Anschließend diskutieren wir in Abschn. 3 das Newton-Verfahen als Anwendung der Fixpunktiteration und zeigen im Beweis zur Konvergenz des eindimensionalen Newton-Verfahrens die Bedeutung des Banach'schen Fixpunktsatzes in der numerischen Mathematik.

1 Fixpunktiteration

Das zentrale Thema diesen Kapitels ist die numerische Lösung von ***nichtlinearen Gleichungssystemen***. Genauer sei

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

eine gegebene Funktion, und wir verwenden die Notationen

$$f(x) \;=\; f(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^n.$$

Gesucht sind Lösungen $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit

$$f(x^*) \;=\; 0. \tag{1}$$

Dabei ist zu beachten, dass wir stets Systeme mit n Gleichungen und n Unbekannten untersuchen werden.

Ein sehr einfacher Lösungsansatz ist ein ***iteratives Verfahren***, in dem wir mit einer (beliebigen) Startlösung $x_{(0)} \in \mathbb{R}^n$ starten und diese von Schritt zu Schritt verbessern, bis eine gewisse Güte erreicht ist. Genauer definieren wir zu einem gegebenen nichtlinearen Gleichungssystem $f(x) = 0$ die Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\phi(x) \;=\; f(x) + x. \tag{2}$$

Es folgt damit, dass $x^* \in \mathbb{R}^n$ genau dann eine Lösung von $f(x) = 0$ ist, wenn x^* ein ***Fixpunkt*** von $\phi(x)$ ist, falls also

$$\phi(x^*) \;=\; x^* \tag{3}$$

gilt. Die Idee der ***Fixpunktiteration*** ist nun folgende: Wir starten mit einem $x_{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und berechnen

$$x_{(k+1)} \;=\; \phi(x_{(k)}) \;=\; f(x_{(k)}) + x_{(k)} \qquad \text{für } k \;= 0, 1, 2, \ldots$$

Angenommen, $\phi(x)$ ist stetig und die Folge $x_{(k)}$ konvergiert gegen einen Grenzwert x^*, dann würde

$$\phi(x^*) \;=\; x^*$$

gelten, und damit wäre x^* eine Lösung des Gleichungssystems $f(x) = 0$.

Aufgabe 1.1 Veranschauliche die Fixpunktiteration grafisch anhand der Funktion

$$\phi(x) \;=\; 1 - \tfrac{1}{2}x^2$$

mit dem Startwert $x_{(0)} = 0,4$.

Im folgenden Verlauf des Abschnitts untersuchen wir Beispiele und Aussagen zur Konvergenz der Folge $x_{(k)}$:

Beispiel 1.1 *In unserem ersten Beispiel suchen wir Lösungen der (eindimensionalen) Gleichung*

$$x^2 \;=\; 2 \qquad \text{für } x > 0.$$

Nun gibt es mehrere Möglichkeiten, die Gleichung in die gewünschte Form $f(x) = 0$ zu überführen:

$$f_1(x) \;=\; x^2 - 2, \qquad f_2(x) \;=\; \frac{2}{x} - x \qquad \text{und} \qquad f_3(x) \;=\; \frac{1}{x} - \frac{x}{2}.$$

Zur Anwendung der Fixpunktiteration ergeben sich damit die Funktionen

$$\phi_1(x) \;=\; x^2 - 2 + x, \qquad \phi_2(x) \;=\; \frac{2}{x} \qquad \text{und} \qquad \phi_3(x) \;=\; \frac{1}{x} + \frac{x}{2}.$$

Tab. 1 zeigt jeweils die ersten sechs Schritte der Fixpunktiteration unter Verwendung dieser drei Darstellungen, wobei als Startwert jeweils $x_{(0)} = 5$ verwendet wurde. Offenbar divergiert das Verfahren mit $\phi_1(x)$, und bei der Verwendung von $\phi_2(x)$ gibt es einen ständigen Wechsel zwischen den Werten 5 und $\frac{2}{5}$. Nur bei $\phi_3(x)$ konvergiert das Verfahren dem Anschein nach gegen die gesuchte Lösung $\sqrt{2}$.