Randwertprobleme

Neben Anfangswertproblemen treten häufige Fragestellungen beispielsweise aus der Physik oder den Ingenieurwissenschaften in Form von Randwertproblemen auf. Dabei handelt es sich um Differenzialgleichungen, welche auf einem Gebiet gelöst werden sollen, wobei Informationen über die gesuchte Funktion am Rand des Gebiets bekannt sind. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit numerischen Lösungsverfahren derartiger Aufgaben. Der Einfachheit halber befassen wir uns ausschließlich mit der zweidimensionalen Poisson-Gleichung (Abschn. 1), obwohl sich die folgenden Methoden auch auf andere Dimensionen und andere Differenzialgleichungen übertragen lassen. Weiterhin beschäftigen wir uns nur mit stationären, also zeitunabhängigen Problemen. Wir präsentieren zwei mögliche Lösungsverfahren, nämlich die Finite-Differenzen-Methode in Abschn. 2 und die Finite-Elemente-Methode in Abschn. 3. Beide Lösungsverfahren werden begleitet durch eine Reihe von Beispielen mit praktischen Anwendungsbezügen wie etwa der Bestimmung der Temperaturverteilung in einem Raum oder in einem Kühlkörper.

1 Grundlagen

In den folgenden Abschnitten untersuchen wir zwei Ansätze zur Lösung von Randwertproblemen, nämlich die Finite-Differenzen-Methode und die Finite-Elemente-Methode. Die Finite-Differenzen-Methode ist vergleichsweise einfach zu implementieren und lässt sich prinzipiell auf generelle Randwertprobleme übertragen, bei der Finite-Elemente-Methode werden dagegen Grundlagen der Funktionalanalysis benötigt, beispielsweise muss zunächst eine schwache Formulierung des Problems gefunden werden. Andererseits lassen sich bei den finiten Elementen sehr allgemeine Gebiete approximieren, während bei den finiten Differenzen im einfachsten Falle nur achsenparallele Rechtecke mit einem äquidistanten Gitter möglich sind.

Als grundlegende Literatur zu diesem Kapitel verweisen wir auf die Bücher von Hanke-Bourgeois (2009) sowie Jung und Langer (2013). Vor allem theoretische

Ergebnisse können dort im Detail nachgelesen und vertieft werden. Wir beginnen nun mit der Problemdefinition dieses Kapitels:

Definition 1.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes* ***Gebiet****, d.h. eine beschränkte, offene und zusammenhängende Menge in der Ebene, und sei Γ der Rand von Ω. Weiter sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine gegebene stetige Funktion. Die* ***Poisson-Gleichung*** *lautet dann*

$$\Delta u(x) \;=\; \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x) \;=\; f(x) \qquad \text{für alle } x \in \Omega, \tag{1}$$

wobei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = u(x_1, x_2)$ eine gesuchte stetige Funktion ist, welche auf Ω zweimal stetig differenzierbar ist.

Bei der Poisson-Gleichung handelt es sich demnach um eine partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung.

Beispiel 1.1 *Ein klassischer Anwendungsfall der Poisson-Gleichung ist die* ***stationäre*** *oder* ***zeitunabhängige Wärmeleitungsgleichung***

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x) \;=\; f(x).$$

Dies ist die physikalische Beschreibung der räumlichen Änderung der Temperatur, sodass die gesuchte Funktion $u(x)$ die Temperatur am Ort $x \in \Omega$ beschreibt.

Wie bereits erwähnt, zeichnet sich ein ***Randwertproblem*** dadurch aus, dass Informationen über die gesuchte Funktion $u(x)$ auf dem Rand Γ von Ω bekannt sind. Hierzu untersuchen wir im Folgenden unterschiedliche Möglichkeiten:

(1) Wenn die gesuchte Funktion $u(x)$ auf dem Rand Γ von Ω bekannt ist, also

$$u(x) \;=\; g(x) \qquad \text{für } x \in \Gamma$$

mit einer gegebenen Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dann sprechen wir von ***Dirichlet-Randbedingungen***.

(2) Wenn der Gradient der gesuchten Funktion $u(x)$ in Richtung der äußeren ***Einheitsnormalen*** $n(x)$ auf dem (differenzierbaren) Rand Γ bekannt ist, also

$$\nabla u(x)^\top \cdot n(x) \;=\; h(x) \qquad \text{für } x \in \Gamma$$

mit einer gegebenen Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (s. auch Abb. 1), dann sprechen wir von ***Neumann-Randbedingungen***.