Daniel Scholz · www.taramath.de · daniel@taramath.de · 9. März 2018

Simplex-Verfahren

Die lineare Programmierung ist ein klassisches Teilgebiet der Optimierung und verfolgt die Aufgabe, lineare Zielfunktionen unter Berücksichtigung linearer Nebenbedingungen zu minimieren. Unter der Annahme, dass alle Variablen reell und damit insbesondere nicht ganzzahlig sind, liefert das Simplex-Verfahren einen gängigen Algorithmus zur Lösung derartiger Probleme. In Abschn. 1 definieren wir lineare Programme in Standardform sowie in allgemeiner Form und präsentieren Anwendungsbeispiele, welche wir in den folgenden Abschnitten aufgreifen werden. Anschließend zeigen wir in Abschn. 2, dass lineare Programme in allgemeiner Form in Standardform überführt werden können, sodass wir die folgenden Lösungsverfahren nur für lineare Programme in Standardform herleiten werden. In Abschn. 3 schaffen wir dank der Definition von Basislösungen die wesentliche Grundlage aller Simplex-Varianten und geben damit auch ein Optimalitätskriterium an. Mit diesen Vorbereitungen sind wir in Abschn. 4 schließlich in der Lage, das primale Simplex-Verfahren im Detail herzuleiten und zu beschreiben. Dabei gehen wir auch ausführlich auf das Finden einer zulässigen Startlösung ein und greifen einige Anwendungsbeispiele aus der Einleitung wieder auf. In den folgenden beiden Abschnitten präsentieren wir mit dem dualen Simplex-Verfahren eine weitere Simplex-Variante, welche je nach Eingabedaten im Vergleich zum primalen Simplex-Verfahren deutlich effizienter sein kann. Hierzu fassen wir in Abschn. 5 wichtige Ergebnisse der Dualitätstheorie zusammen, welche wir anschließend in der Herleitung des dualen Simplex-Verfahrens in Abschn. 6 benötigen. Wir beenden auch diesen Abschnitt mit der Lösung eines Anwendungsproblems aus der Einleitung.

1 Grundlagen der linearen Optimierung

Eine ***Optimierungsaufgabe*** oder ein ***Optimierungsproblem*** wird spezifiziert durch

$$\min f(x), \qquad \text{sodass} \qquad x \in P.$$

Dabei wird die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ als ***Zielfunktion*** und $P \subset \mathbb{R}^n$ als ***zulässiger Bereich*** bezeichnet, wobei der zulässige Bereich häufig durch ***Nebenbedingungen*** definiert wird. Weiterhin sei bemerkt, dass eine Optimierungsaufgabe auch als Maximierungsproblem formuliert werden kann.

Besonders wichtig ist eine Unterscheidung zwischen dem Begriff einer Lösung sowie dem Begriff einer Optimallösung eines Optimierungsproblems. Wir beginnen daher mit folgender Definition:

Definition 1.1 *Gegeben sei ein Optimierungsproblem*

$$\min f(x), \qquad \text{sodass} \qquad x \in P.$$

Wir sagen, dass ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ eine ***Lösung*** *des Optimierungsproblem ist, falls x* ***zulässig*** *ist, falls also $x \in P$ gilt.*

Eine ***Optimallösung*** *hingegen ist eine zulässige Lösung, welche einen optimale Zielfunktionswert liefert, d.h. ein $x^* \in P$ mit*

$$f(x^*) \;\leq\; f(x)$$

für alle $x \in P$.

Nach den allgemeinen begrifflichen Definitionen gehen wir nun zum Spezialfall von linearen Programmen über, d.h. zu Optimierungsaufgaben mit linearer Zielfunktion und linearen Nebenbedingungen:

Definition 1.2 *Ein* ***lineares Programm*** *in* ***Standardform*** *wird gegeben durch*

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \;=\; b \quad \text{und} \quad x \;\geq\; 0. \tag{1}$$

Dabei sind $c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegebene Vektoren sowie $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine gegebene Matrix.

Der zulässige Bereich eines linearen Programms in Standardform wird somit gegeben durch das ***Polyeder***

$$P \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; A \cdot x = b,\; x \geq 0\}$$

und der Vektor c wird als ***Kostenvektor*** bezeichnet.

Wir werden im Folgenden häufig die Annahme treffen, dass der Rang der Matrix A gleich m ist und dass $n \geq m$ gilt. Diese Annahmen sind plausibel, denn anderenfalls können wir das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mittels Anwendung elementarer Zeilenoperationen stets in ein äquivalentes System überführen, welchen den Annahmen genügt.

Weiterhin werden in der (linearen) Optimierung einige Notationen genutzt, die auf den ersten Blick zunächst ungewohnt erscheinen mögen. Beispielsweise ist

$$x \;\geq\; 0$$

für einen Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ komponentenweise zu verstehen, d.h. $x \geq 0$ ist gleichbedeutend mit

$$x_k \;\geq\; 0 \qquad \text{für alle } k = 1, \ldots, n.$$

Zudem ist $x \lesseqgtr 0$ eine übliche Schreibweise für $x \in \mathbb{R}^n$. Diese Notation wird insbesondere dann verwendet, wenn hervorgehoben werden soll, dass es sich um im Vorzeichen unbeschränkte Variablen handelt. Damit können wir auf die allgemeine Definition eines linearen Programms eingehen:

Definition 1.3 *Ein* ***lineares Programm*** *in* ***allgemeiner Form*** *wird gegeben durch*

$$\begin{array}{llrcll}
\min c^\top \cdot x, & \text{sodass} & a_i^\top \cdot x & = & b_i & \text{für alle } i \in I_1, \\
 & & a_i^\top \cdot x & \geq & b_i & \text{für alle } i \in I_2, \\
 & & a_i^\top \cdot x & \leq & b_i & \text{für alle } i \in I_3, \\
 & & x_j & \lesseqgtr & 0 & \text{für alle } j \in J_1, \\
 & & x_j & \geq & 0 & \text{für alle } j \in J_2, \\
 & & x_j & \leq & 0 & \text{für alle } j \in J_3.
\end{array}$$

Dabei sind $c \in \mathbb{R}^n$ und $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ gegebene Vektoren sowie

$$A \;=\; (a_1, \ldots, a_m) \;\in\; \mathbb{R}^{m \times n}$$

eine gegebene Matrix mit den Zeilen $a_i \in \mathbb{R}^n$ für $i = 1, \ldots, m$. Weiter seien mit

$$I_1 \cup I_2 \cup I_3 \;=\; \{1, \ldots, m\} \qquad \text{und} \qquad J_1 \cup J_2 \cup J_3 \;=\; \{1, \ldots, n\}$$

disjunkte Zerlegungen der Indexmengen $\{1, \ldots, m\}$ und $\{1, \ldots, n\}$ gegeben.

Aufgabe 1.1 Erläutere, warum die Nebenbedingungen eines linearen Programms niemals durch $>$ und $<$ statt $\leq$ und $\geq$ definiert werden sollten. Welche Aussagen hinsichtlich der Lösbarkeit der Programme würden sich anderenfalls formulieren lassen.

Bei einem linearen Programm in Standardform handelt es sich also um den Fall

$$I_1 = \{1, \ldots, m\} \qquad \text{und} \qquad J_2 = \{1, \ldots, n\}.$$

Abschließend diskutieren wir einige Beispiele, welche im weiteren Verlauf des Kapitels aufgreifen werden:

Beispiel 1.1 (Produktionsproblem) *Ein klassischer Anwendungsfall der linearen Optimierung ist das* ***Produktionsproblem****. Dazu nehmen wir an, dass eine Firma n unterschiedliche Produkte herstellen möchte, wobei $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ den Gewinn pro Einheit definiert, d.h. eine Einheit von Produkt j bringt einen Gewinn von c_j.*

Zur Herstellung der Produkte sind insgesamt m Maschinen notwendig, wobei durch $a_{i,j}$ definiert wird, dass zur Produktion einer Einheit von Produkt j die Machine i für $a_{i,j}$ Zeiteinheiten (beispielsweise Stunden) benötigt wird. Insgesamt erhalten wir damit eine Matrix $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Weiterhin stehen die Maschinen aufgrund von Wartungen etc. nicht unbeschränkt zur Verfügung, wobei die Verfügbarkeiten durch $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ definiert werden. Genauer steht Maschine i pro Jahr für maximal b_i Zeiteinheiten zur Verfügung.

Die Aufgabe der Firma besteht nun darin, zu klären, wieviele Einheiten x_j von Produkt j für $j = 1, \ldots, n$ hergestellt werden sollten, um den Gewinn zu maximieren und ohne die Verfügbarkeiten der Maschinen zu verletzen. Dabei wird davon ausgegangen, dass alle hergestellten Produkte auch stets verkauft werden.

Dieses Problem kann als lineares Optimierungsproblem modelliert werden:

$$\max c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \leq b \quad \text{und} \quad x \geq 0.$$

Wir erhalten somit ein lineares Programm in allgemeiner Form, dessen Lösung die jeweils zu produzierenden Einheiten hinsichtlich einer Gewinnmaximierung liefert. Weiterhin ist zu beachten, dass wir das Problem anders als in der Definition zuvor als Maximierungsproblem formuliert haben.

Aufgabe 1.2 Erläutere, warum dass lineare Programm zur Produktionsplanung aus dem Beispiel zuvor stets eine Optimallösung besitzt. Zeige dazu, dass das Problem stets eine zulässige Lösung besitzt und zudem beschränkt ist.

Beispiel 1.2 (Transportproblem) *Das* ***Transportproblem*** *hat das Ziel, Transportkosten zwischen Angebots- und Nachfrageorten zu minimieren. Gegeben seien daher r Angebotsorte $g_1, \ldots, g_r \in \mathbb{R}^2$ sowie s Nachfrageorte $h_1, \ldots, h_s \in \mathbb{R}^2$. In allen Angebotsorten wird ein identisches Produkt hergestellt, wobei für $i = 1, \ldots, r$ der Angebotsort g_i die Menge $u_i \geq 0$ produziert. In den Nachfrageorten h_j be-*

steht jeweils eine Nachfrage von $w_j \geq 0$ für $j = 1, \ldots, s$. Dabei nehmen wir der Einfachheit halber an, dass

$$\sum_{i=1}^{r} u_i \;=\; \sum_{j=1}^{s} w_j$$

gilt, sodass Angebot und Nachfrage jeweils genau ausgeglichen sind. Weiterhin definiert $c_{i,j} \geq 0$ die Transportkosten für eine Mengeneinheit des Produktes vom Angebotsort g_i zum Nachfrageort h_j.

Die Aufgabe besteht nun darin, alle Nachfrageorte gemäß der gegebenen Nachfrage durch die Angebotsorte zu beliefern und dabei die Transportkosten zu minimieren. Genau diese Aufgabe lässt sich durch folgendes lineares Programm beschreiben:

$$\min \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} c_{i,j}\cdot x_{i,j}\,, \qquad \text{sodass} \qquad \begin{aligned} \sum_{i=1}^{r} x_{i,j} &= w_j && \text{für } j = 1, \ldots, s, \\ \sum_{j=1}^{s} x_{i,j} &= u_i && \text{für } i = 1, \ldots, r, \\ x_{i,j} &\geq 0. \end{aligned}$$

Dabei beschreibt $x_{i,j}$ die Menge, die vom Angebotsort i zum Nachfrageort j transportiert wird.

Wir erhalten also ein lineares Programm in Standardform mit $n = r \cdot s$ Variablen und $m = r+s$ Nebenbedingungen. Die ersten s Nebenbedingungen beschreiben dabei, dass die Nachfrage in jedem Nachfrageort vollständig erfüllt wird. Die anderen r Nebenbedingungen beschreiben, dass das Angebot in jedem Angebotsorte vollständig abgerufen wird.

Aufgabe 1.3 Formuliere das Transportproblem als lineares Programm, wobei die Summe über dem Angebot aller Angebotsorte größer gleich der Summe über der Nachfrage aller Nachfrageorte sei.

Beispiel 1.3 (Ausgleichsprobleme) *Gegeben seien eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Zeilenvektoren $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ sowie ein Vektor $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. Dabei gelte $m > n$ und der Rang von A sei gleich n. Unter diesen Annahmen besitzt das lineare Gleichungssystem*

$$A \cdot x \;=\; b$$

keine Lösung. Mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist man daher häufig daran interessiert, eine Lösung der Optimierungsaufgabe

$$\min \|A\cdot x - b\|_\infty \;=\; \min \max\{a_i^\top \cdot x - b_i \;:\; i = 1, \ldots, m\}$$

zu bestimmen. Eine derartige Optimierungsaufgabe wird als ***lineares Ausgleichsproblem*** *bezeichnet.*

Schließlich lässt sich ein lineares Ausgleichsproblem unter Verwendung der Maximumsnorm in das folgende äquivalente lineare Programm überführen:

$$\begin{array}{llrcll} \min\ t, & \text{sodass} & a_i^\top \cdot x - t & \leq & b_i & \text{für alle } i \in \{1, \ldots, m\}, \\ & & a_i^\top \cdot x + t & \geq & b_i & \text{für alle } i \in \{1, \ldots, m\}, \\ & & x_j & \lesseqgtr & 0 & \text{für alle } j \in \{1, \ldots, n\}, \\ & & t & \geq & 0. & \end{array}$$

Dieses lineare Programm besitzt $n + 1$ *Variablen sowie* $2 \cdot m$ *Nebenbedingungen.*

Aufgabe 1.4 Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sowie in Vektor $b \in \mathbb{R}^m$. Überführe das lineare Ausgleichsproblem

$$\min\ \|A \cdot x - b\|_1$$

unter Verwendung der Summennorm $\| \cdot \|_1$ in ein äquivalentes lineares Programm.

Alle Verfahren und Herleitungen aus diesem Kapitel können in üblichen Lehrbüchern zur Optimierung bzw. zum Operations Research vertieft werden, etwa in Domschke et al. (2015), Jarre und Stoer (2004), Hamacher und Klamroth (2006) oder Chvátal (1983). Insbesondere können dort auch alle Beweise nachgeschlagen werden, welche wir in diesem Kapitel bewusst aussparen und stattdessen durch zahlreiche Beispiele ersetzen.

2 Reduktion auf Standardform

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass jedes lineare Programm in allgemeiner Form in ein lineares Programm in Standardform überführt werden kann. Als Folge davon werden wir in den folgenden Abschnitten nur Lösungsverfahren für lineare Programme in Standardform herleiten.

Wir beginnen zunächst mit einer einfachen Begründung, warum wir lineare Programme stets als Minimierungsproblem auffassen werden:

Lemma 2.1 *Jedes lineare Maximierungsproblem lässt sich in ein äquivalentes lineares Minimierungsproblem überführen.*

Beweis *Jedes Maximierungsproblem* $\max\ f(x)$ *ist (unabhängig vom zulässigen Bereich) äquivalent zum Minimierungsproblem* $\min\ -f(x)$. *Die Behauptung folgt somit, indem der Kostenvektor* c *negiert wird.* □

Insbesondere ist jede Optimallösung des Minimierungsproblems auch eine Optimallösung des Maximierungsproblems und umgekehrt.

Wir wollen nun zeigen, wie ein allgemeines lineares Programm

$$
\begin{array}{lllll}
\min c^\top \cdot x, & \text{sodass} & a_i^\top \cdot x & = & b_i & \text{für alle } i \in I_1, \\
 & & a_i^\top \cdot x & \geq & b_i & \text{für alle } i \in I_2, \\
 & & a_i^\top \cdot x & \leq & b_i & \text{für alle } i \in I_3, \\
 & & x_j & \lesseqgtr & 0 & \text{für alle } j \in J_1, \\
 & & x_j & \geq & 0 & \text{für alle } j \in J_2, \\
 & & x_j & \leq & 0 & \text{für alle } j \in J_3
\end{array}
$$

in Standardform

$$
\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x = b \quad \text{und} \quad x \geq 0
$$

überführt werden kann. Hierzu untersuchen wir die einzelnen Nebenbedingungen der Reihe nach:

(1) Für alle Nebenbedingungen i aus der Indexmenge I_1 ist nichts weiter zu tun.

(2) Für alle Nebenbedingungen i aus der Indexmenge I_2 führen wir eine ***Schlupfvariable*** $s_i \in \mathbb{R}$ mit $s_i \geq 0$ ein. Damit ist

$$
a_i^\top \cdot x \geq b_i \qquad \text{äquivalent zu} \qquad a_i^\top \cdot x - s_i = b_i.
$$

Es muss jedoch beachtet werden, dass wir das gesamte lineare Programm für alle $i \in I_2$ um eine Variable ergänzen. Somit müssen wir auch den Kostenvektor c für alle $i \in I_2$ um ein Element erweitern: Alle neuen Elemente sind gleich null, denn die Schlupfvariablen haben keinen Einfluss auf die Zielfunktion (Beispiel 2.1).

(3) Für alle Nebenbedingungen i aus der Indexmenge I_3 führen wir analog dem Fall zuvor eine ***Schlupfvariable*** $s_i \in \mathbb{R}$ mit $s_i \geq 0$ ein, sodass

$$
a_i^\top \cdot x \leq b_i \qquad \text{äquivalent zu} \qquad a_i^\top \cdot x + s_i = b_i
$$

ist. Wieder muss beachtet werden, dass wir das gesamte lineare Programm für alle $i \in I_3$ um eine Variable ergänzen, d.h. wir müssen auch den Kostenvektor c jeweils um ein Element mit dem Wert Null erweitern (Beispiel 2.2).

(4) Für alle Variablen j aus der Indexmenge J_1 führen wir eine Substitution von x_j unter Verwendung von

$$
x_j = y_j - z_j \qquad \text{mit} \qquad y_j, z_j \geq 0
$$

durch. Damit wird die Anzahl der Variablen des linearen Programms für alle $j \in J_1$ um eins erhöht, wobei auch der Kostenvektor c entsprechend angepasst werden muss (Beispiel 2.3).

(5) Für alle Variablen j aus der Indexmenge J_2 ist nichts weiter zu tun.

(6) Für alle Variablen j aus der Indexmenge J_3 führen wir eine Substitution von x_j unter Verwendung von

$$x_j \;=\; -z_j \qquad \text{mit} \qquad z_j \geq 0$$

durch. Die Anzahl der Variablen bleibt damit unverändert, es müssen nur die entsprechenden Vorzeichen im Kostenvektor c sowie in der Matrix A geändert werden (Beispiel 2.4).

Die folgenden Beispiele verdeutlichen die Reduktion auf Standardform:

Beispiel 2.1 *Gegeben sei das lineare Programm*

$$\min\ (1,\,2)^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{sodass} \qquad (3,\,4)^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\geq\; 3$$

und $x_1, x_2 \geq 0$. *In Standardform überführt erhalten wir*

$$\min\ (1,\,2,\,0)^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \end{pmatrix}, \qquad \text{sodass} \qquad (3,\,4,\,-1)^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \end{pmatrix} \;=\; 3$$

und $x_1, x_2, s_1 \geq 0$.

Beispiel 2.2 *Gegeben sei das lineare Programm*

$$\min\ (1,\,2)^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{sodass} \qquad (3,\,4)^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\leq\; 3$$

und $x_1, x_2 \geq 0$. *In Standardform überführt erhalten wir*

$$\min\ (1,\,2,\,0)^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \end{pmatrix}, \qquad \text{sodass} \qquad (3,\,4,\,1)^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \end{pmatrix} \;=\; 3$$

und $x_1, x_2, s_1 \geq 0$.

Beispiel 2.3 *Gegeben sei das lineare Programm*

$$\min\ (5,\,2)^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{sodass} \qquad (3,\,4)^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;=\; 3$$

mit $x_1 \lesseqgtr 0$ *und* $x_2 \geq 0$. *In Standardform überführt erhalten wir*

$$\min\ (5,\,-5,\,2)^\top \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{sodass} \qquad (3,\,-3,\,4)^\top \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;=\; 3$$

und $y_1, z_1, x_2 \geq 0$.

Beispiel 2.4 *Gegeben sei das lineare Programm*

$$\min\ (5,\ 2)^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{sodass} \qquad (3,\ -4)^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;=\; 3$$

mit $x_1 \geq 0$ *und* $x_2 \leq 0$. *In Standardform überführt erhalten wir*

$$\min\ (5,\ -2)^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{sodass} \qquad (3,\ 4)^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \;=\; 3$$

und $x_1, z_2 \geq 0$.

Aufgabe 2.1 Gegeben sei das lineare Programm

$$\min\ (-1,\ 7)^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{sodass} \qquad (-3,\ 1)^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\geq\; -3$$

und $x_1 \leq 0$ sowie $x_2 \lesseqgtr 0$. Formuliere das Problem als lineares Programm in Standardform.

Im folgenden Beispiel werden nochmals fast alle Ergebnisse diesen Abschnitts aufgegriffen. Wir verzichten dabei auf die vektorielle Darstellung und geben Zielfunktion sowie Nebenbedingungen bewusst ausgeschrieben an, um unterschiedliche Schreibeweisen zu verdeutlichen:

Beispiel 2.5 *Gegeben sei das lineare Programm*

$$\begin{array}{llrcl} \max\ 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3, & \text{sodass} & x_1 + x_2 & \leq & 7 \\ & & -3 \cdot x_1 - x_2 + x_3 & \geq & 1 \\ & & x_1 & \leq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \\ & & x_3 & \lesseqgtr & 0. \end{array}$$

In Standardform überführt erhalten wir folgendes lineare Programm:

$$\begin{array}{llrcl} \min\ 2 \cdot z_1 + 3 \cdot x_2 - 4 \cdot y_3 + 4 \cdot z_3, & \text{sodass} & -z_1 + x_2 + s_1 & = & 7 \\ & & 3 \cdot z_1 - x_2 + y_3 - z_3 - s_2 & = & 1 \\ & & z_1,\ x_2,\ y_3,\ z_3,\ s_1,\ s_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Falls $(z_1^*,\ x_2^*,\ y_3^*,\ z_3^*,\ s_1^*,\ s_2^*)$ *eine Optimallösung des linearen Programms in Standardform ist, dann ist*

$$(x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*) \;=\; (-z_1^*,\ x_2^*,\ y_3^* - z_3^*)$$

eine Optimallösung des ursprünglichen linearen Programms in allgemeiner Form.

Aufgabe 2.2 Zeige, dass sich jedes lineare Programm in allgemeiner Form in ein äquivalentes lineares Programm der Form

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \;\leq\; b \quad \text{und} \quad x \;\lesseqgtr\; 0$$

überführen lässt.

3 Basislösungen

In diesem Abschnitt treffen wir wichtige Vorbereitungen, um im weiteren Verlauf des Kapitels Lösungsverfahren für lineare Programme in Standardform herzuleiten. Gegeben sei daher ein lineares Programm

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \;=\; b \quad \text{und} \quad x \;\geq\; 0$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$ sowie mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dabei gelte wie oben bereits erläutert stets $n \geq m$ und der Rang der Matrix A sei gleich m, sodass stets m linear unabhängige Spalten von A existieren. Als Notation verwenden wir

$$A \;=\; (a_1 \; a_2 \; \cdots \; a_n) \;\in\; \mathbb{R}^{m \times n}$$

mit $a_j \in \mathbb{R}^m$ für $j = 1, \ldots, n$, sodass wir mit a_j im Folgenden den j-ten Spaltenvektor der Matrix A beschreiben. Wir können damit folgende Definition formulieren:

Definition 3.1 *Gegeben sei eine Matrix $A = (a_1 \; \cdots \; a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $a_j \in \mathbb{R}^m$ für $j = 1, \ldots, n$. Weiterhin gelte $n \geq m$ und der Rang von A sei gleich m. Ein Vektor*

$$B \;=\; (j_1, \ldots, j_m) \;\in\; \mathbb{R}^m \qquad \text{mit} \qquad j_k \;\in\; \{1, \ldots, n\}$$

*für alle $k = 1, \ldots, m$ heißt **Basis** von A, falls die Matrix*

$$A_B \;=\; (a_{j_1} \; \cdots \; a_{j_m}) \;\in\; \mathbb{R}^{m \times m}$$

regulär ist, falls also die entsprechenden Spalten von A_B linear unabhängig sind.

Die Matrix A_B besteht somit aus den entsprechenden Spaltenvektoren der Basis B, wobei die Reihenfolge der Spaltenvektoren zu berücksichtigen ist.

Aufgabe 3.1 Erläutere, warum jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, welche die Anforderungen aus der Definition zuvor erfüllt, eine Basis B besitzt.

?

Wir verdeutlichen die Definition an einem Beispiel, welches wir im weiteren Verlauf erweitern werden:

Beispiel 3.1 *Gegeben sei die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}.$$

Dann ist $B = (2,1,5)$ eine Basis von A mit

$$A_B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Der Vektor $B = (3,5,1)$ ist hingegen keine Basis, denn die zugehörige Matrix

$$A_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist nicht regulär.

Weiterhin ist zu beobachten, dass die Elemente jeder Basis $B = (j_1, \ldots, j_m)$ paarweise verschieden sind, d.h. es gilt

$$j_r \neq j_s \qquad \text{für alle } r, s \in \{1,\ldots,m\} \text{ mit } r \neq s.$$

Wäre dies nicht der Fall, so würde die zugehörige Matrix A_B zwei identische Spalten haben und wäre somit nicht regulär. Diese Beobachtung rechtfertigt die folgende Notation:

Notation 3.2 *Gegeben sei eine Matrix $A = (a_1 \ \cdots \ a_n) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $a_j \in \mathbb{R}^m$ für $j = 1,\ldots,n$. Weiterhin gelte $n \geq m$, der Rang von A sei gleich m und*

$$B = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathbb{R}^m \qquad \text{mit} \qquad j_k \in \{1,\ldots,n\}$$

für alle $k = 1,\ldots,m$ sei eine Basis von A. Dann bezeichnen wir den Vektor

$$N = (s_1, \ldots, s_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m} \qquad \text{mit} \qquad s_k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j_1,\ldots,j_m\}$$

*für alle $k = 1, \ldots, n-m$ sowie mit $s_i < s_j$ für $1 \leq i < j \leq n-m$ als **Nichtbasis** von A bezüglich der Basis B.*

Der Vektor N ist der Größe nach sortiert und die Element s_k sind alle Indizes aus der Menge $\{1, \ldots, n\}$, welche nicht in der zugehörigen Basis B enthalten sind. Mit anderen Worten: Ist $B = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathbb{R}^m$ eine Basis von A und entsprechend $N = (s_1, \ldots, s_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m}$ die zugehörige Nichtbasis, dann gilt

$$\{j_1, \ldots, j_m, s_1, \ldots, s_{n-m}\} = \{1, \ldots, n\}.$$

Wir erweitern damit das Beispiel zuvor:

Beispiel 3.2 *Gegeben sei die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}.$$

Dann ist $B = (2, 1, 5)$ eine Basis von A mit zugehöriger Nichtbasis $N = (3, 4)$.

Zusammengefasst erhalten wir Dank der Definition von Basis und Nichtbasis eine geeignete Aufteilung der Menge der Spalten von A, welche eine wesentliche Grundlage für die folgenden Ergebnisse darstellt. Genauer wenden wir den Begriff der Basis nun auf lineare Programme an:

Definition 3.3 *Gegeben sei ein lineares Programm*

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x = b \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

mit Kostenvektor $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, mit rechter Seite $b \in \mathbb{R}^m$ sowie mit $A = (a_1 \; \cdots \; a_n) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dabei gelte $n \geq m$ und der Rang von A sei gleich m. Weiterhin sei $B = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathbb{R}^m$ eine Basis von A mit zugehöriger Nichtbasis $N = (s_1, \ldots, s_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Dann bezeichnen wir für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ die Vektoren

$$x_B = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}) \in \mathbb{R}^m \qquad \text{und} \qquad x_N = (x_{s_1}, \ldots, x_{s_{n-m}}) \in \mathbb{R}^{n-m}$$

*als **Basisvariablen** und **Nichtbasisvariablen** sowie die Vektoren*

$$c_B = (c_{j_1}, \ldots, c_{j_m}) \in \mathbb{R}^m \qquad \text{und} \qquad c_N = (c_{s_1}, \ldots, c_{s_{n-m}}) \in \mathbb{R}^{n-m}$$

*als **Basiskosten** und **Nichtbasiskosten**. Darüber hinaus sei*

$$A_N = (a_{s_1} \; \cdots \; a_{s_{n-m}}) \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$$

*der **Nichtbasisanteil** von A.*

Beispiel 3.3 *Gegeben sei der Kostenvektor* $c = (3, -5, 0, 2, 1) \in \mathbb{R}^5$ *sowie die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}.$$

Dann ist $B = (2, 1, 5)$ *eine Basis von* A *mit zugehöriger Nichtbasis* $N = (3, 4)$*. Es gilt*

$$c_B = (-5, 3, 1) \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{und} \qquad c_N = (0, 2) \in \mathbb{R}^2$$

und für $x = (0, 3, 8, 6, 0) \in \mathbb{R}^5$ *erhalten wir*

$$x_B = (3, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{und} \qquad x_N = (8, 6) \in \mathbb{R}^2.$$

Zusammenfassend handelt es sich bei den neuen Notationen lediglich um eine Umsortierung der Vektoreinträge.

Die bislang eingeführten Bezeichnungen werden wir nun nutzen, um Lösungen des Gleichungssystem $A \cdot x = b$ genauer zu analysieren.

Herleitung *Unter den gewohnten Annahmen können wir das Gleichungssystem* $A \cdot x = b$ *unter Verwendung einer Basis* B *folgendermaßen aufschreiben:*

$$b = A \cdot x = A_B \cdot x_B + A_N \cdot x_N. \tag{2}$$

Per Definition einer Basis ist A_B *regulär, sodass wir diese Gleichung nach* x_B *auflösen können:*

$$x_B = A_B^{-1} \cdot b - A_B^{-1} \cdot A_N \cdot x_N. \tag{3}$$

Genauer bedeutet dies, dass die Nichtbasisvariablen x_N *zu jeder Basis* B *zunächst beliebig gewählt werden können. Wenn wir anschließend die Basisvariablen* x_B *unter Verwendung von Gl. (3) berechnen, so erhalten wir stets eine Lösung des Gleichungssystems* $A \cdot x = b$*.*

Lemma 3.1 *Gegeben sei* $b \in \mathbb{R}^m$ *sowie eine Matrix* $A = (a_1 \ \cdots \ a_n) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *mit* $a_j \in \mathbb{R}^m$ *für* $j = 1, \ldots, n$*. Dabei gelte* $n \geq m$ *und der Rang von* A *sei gleich* m*. Weiterhin sei* B *eine Basis von* A *mit zugehöriger Nichtbasis* N*.*

Dann ist $x \in \mathbb{R}^n$ *mit zugehörigen Basisvariablen* $x_B \in \mathbb{R}^m$ *und Nichtbasisvariablen* $x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$ *genau dann eine Lösung von* $A \cdot x = b$*, falls*

$$x_B = A_B^{-1} \cdot b - A_B^{-1} \cdot A_N \cdot x_N \tag{4}$$

gilt. Wir nennen x *eine* ***Basislösung****, falls* $x_N = 0$ *gewählt wird und somit*

$$x_B = A_B^{-1} \cdot b$$

folgt. Eine Basislösung heißt ***zulässig****, falls* $x_B \geq 0$ *gilt.*

Mit anderen Worten besagt die Aussage zurvor, dass wir zu jeder Basis B eine eindeutige Basislösung x mit $x_B = A_B^{-1} \cdot b$ und $x_N = 0$ erhalten, für welche $A \cdot x = b$ gilt. Es ist jedoch nicht ohne Weiteres geklärt, ob es eine Basis B gibt, welche eine zulässige Basislösung liefert. Diese Frage greifen wir nach dem folgenden Beispiel wieder auf.

Beispiel 3.4 *Gegeben sei der Vektor* $b = (-6,\ 9,\ -3) \in \mathbb{R}^3$ *sowie die Matrix*

$$A \ = \ \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ \in \ \mathbb{R}^{3\times 5}.$$

Dann ist $B = (2, 1, 5)$ *eine Basis von* A *und mit* $x_N = 0 \in \mathbb{R}^2$ *sowie mit*

$$\begin{aligned} x_B \ = \ A_B^{-1} \cdot b \ &= \ \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \ \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & 21 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \ = \ (9,\ -12,\ 72) \ \in \ \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

erhalten wir die zugehörige Basislösung $x = (-12,\ 9,\ 0,\ 0,\ 72) \in \mathbb{R}^5$. *Diese Basislösung ist jedoch aufgrund der* -12 *nicht zulässig.*

Aufgabe 3.2 Betrachte die Matrix A sowie den Vektor b aus dem Beispiel zuvor und zeige, dass die Basislösung zur Basis $B = (2, 3, 4)$ zulässig ist.

Wir wollen nun eine Antwort auf die Frage geben, unter welchen Umständen ein lineares Programm in Standardform eine zulässige Basislösung besitzt. Hierzu machen wir uns zunächst Gedanken darüber, welche Fälle bei der Lösung eines linearen Programms auftreten können. Sei also

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \ = \ b \quad \text{und} \quad x \ \geq \ 0$$

ein lineares Programm in Standardform wie bisher mit $c \in \mathbb{R}^n$, mit $b \in \mathbb{R}^m$ sowie mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dabei gelte $n \geq m$ und der Rang von A sei gleich m. Dann können folgende Fälle auftreten:

(1) Das lineare Programm ist ***unzulässig***, d.h. es gibt keine zulässige Lösung, also kein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $A \cdot x = b$ und $x \geq 0$.

(2) Das lineare Programm ist ***unbeschränkt***, d.h. für alle $M \in \mathbb{R}$ gibt es eine zulässige Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ mit $c^T \cdot x < M$.

(3) Das lineare Programm ist zulässig und beschränkt, d.h. es existiert eine beschränkte Optimallösung.

Das folgende Lösungsverfahren wird so konzipiert sein, dass wir entweder eine beschränkte Optimallösung erhalten, oder aber herausfinden werden, dass das lineare Programm unzulässig bzw. unbeschränkt ist.

Aufgabe 3.3 Formuliere ein lineares Programm, welches unzulässig ist. Formuliere ein zweites lineares Programm, welches unbeschränkt ist.

?

Der folgende Satz besagt schließlich, dass jedes zulässige und beschränkte lineare Programm auch eine zulässige Basislösung besitzt. Die Beweise dieser sowie der folgenden Aussage können mit üblichen Mitteln der linearen Algebra geführt werden. Für Details sei auf Jarre und Stoer (2004) oder Hamacher und Klamroth (2006) verwiesen.

Satz 3.2 *Gegeben sei ein lineares Programm*

!

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x = b \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, *mit* $b \in \mathbb{R}^m$ *sowie mit* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. *Dabei gelte* $n \geq m$ *und der Rang von* A *sei gleich* m. *Zudem sei bekannt, dass das lineare Programm zulässig ist, d.h. es gebe ein* $x \in \mathbb{R}^n$ *mit* $A \cdot x = b$ *und* $x \geq 0$.

Dann besitzt das lineare Programm eine zulässige Basislösung.

Darüber hinaus lässt sich sogar zeigen, dass jedes zulässige und beschränkte lineare Programm eine Optimallösung besitzt, welches eine zulässige Basislösung ist. Diese Aussage wird häufig als Hauptsatz der linearen Optimierung bezeichnet:

Satz 3.3 (Hauptsatz der linearen Optimierung) *Gegeben sei ein lineares Programm*

!

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x = b \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, *mit* $b \in \mathbb{R}^m$ *sowie mit* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. *Dabei gelte* $n \geq m$ *und der Rang von* A *sei gleich* m. *Weiterhin sei bekannt, dass das lineare Programm zulässig und beschränkt ist.*

Dann besitzt das lineare Programm eine Optimallösung, welche eine zulässige Basislösung ist.

Der Hauptsatz der linearen Optimierung liefert damit eine der wesentlichen Grundlagen zum Simplex-Verfahren aus dem folgenden Abschnitt: Im Algorithmus werden solange zulässige Basislösungen untersucht, bis eine Optimallösung gefunden ist. Dabei lässt sich sogar zu jeder zulässigen Basislösung überprüfen, ob bereits eine Optimallösung vorliegt. Ein derartiges Kriterium wollen wir nun herleiten:

Herleitung *Gegeben sei ein lineares Programm*

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \;=\; b \quad \text{und} \quad x \;\geq\; 0$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$*, mit* $b \in \mathbb{R}^m$ *sowie mit* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$*. Dabei gelte* $n \geq m$ *und der Rang von* A *sei gleich* m*. Weiterhin sei* $B \in \mathbb{R}^m$ *eine Basis von* A *mit zugehöriger Nichtbasis* $N \in \mathbb{R}^{n-m}$*.*

Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ *gilt unter Verwendung von Gl. (4)*

$$\begin{aligned} c^\top \cdot x &= c_B^\top \cdot x_B + c_N^\top \cdot x_N \\ &= c_B^\top \cdot \left(A_B^{-1} \cdot b - A_B^{-1} \cdot A_N \cdot x_N \right) + c_N^\top \cdot x_N \\ &= c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot b - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A_N \cdot x_N + c_N^\top \cdot x_N \\ &= c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot b + \left(c_N^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A_N \right) \cdot x_N. \end{aligned} \tag{5}$$

Diese Darstellung zeigt, dass zu jeder Basis B *der Zielfunktionswert* $c^\top \cdot x$ *einzig und allein durch die Nichtbasisvariablen* $x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$ *bestimmt wird. Da ein* $x \in \mathbb{R}^n$ *aber nur dann zulässig ist, falls* $x \geq 0$ *und damit insbesondere auch* $x_N \geq 0$ *gilt, kann der Zielfunktionswert nicht verbessert werden, falls der Ausdruck*

$$c_N^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A_N$$

komponentenweise größer gleich null ist.

Als Ergebnis dieser Herleitung kann das Optimalitätskriterium formuliert werden:

Satz 3.4 (Optimalitätskriterium) *Gegeben sei ein lineares Programm*

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \;=\; b \quad \text{und} \quad x \;\geq\; 0$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$*, mit* $b \in \mathbb{R}^m$ *sowie mit* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$*. Dabei gelte* $n \geq m$ *und der Rang von* A *sei gleich* m*. Weiterhin sei* $B \in \mathbb{R}^m$ *eine Basis von* A *mit zulässiger Basislösung, d.h. es gelte* $x_B = A_B^{-1} \cdot b \geq 0$*.*

Dann ist die Basislösung zur Basis B *eine Optimallösung des linearen Programms, falls*

$$c^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A \;\geq\; 0 \tag{6}$$

gilt.

Beweis *Dank der Herleitung ist die Behauptung im Wesentlichen schon gezeigt. Es bleibt jedoch zu bemerken, dass die beiden Bedingungen*

$$c_N^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A_N \;\geq\; 0 \qquad \text{und} \qquad c^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A \;\geq\; 0$$

äquivalent sind. □

Aufgabe 3.4 Vervollständige den Beweis. D.h. begründe im Detail, warum die beiden Aussagen

$$c_N^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A_N \;\geq\; 0 \qquad \text{und} \qquad c^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A \;\geq\; 0$$

äquivalent sind. Zeige dazu insbesondere, dass zu jeder Basis $B = (j_1, \ldots, j_m)$ für den Vektor

$$h_B \;=\; (h_1, \ldots, h_n) \;=\; c^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A \;\in\; \mathbb{R}^n$$

gerade $h_{j_k} = 0$ für $k = 1, \ldots, m$ gilt.

Wir verdeutlichen das Optimalitätskriterium am bekannten Beispiel:

Beispiel 3.5 *Gegeben sei der Kostenvektor* $c = (3,\, -5,\, 0,\, 2,\, 1) \in \mathbb{R}^5$ *sowie die Matrix*

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^{3\times 5}$$

und der Vektor $b = (-6,\, 9,\, -3) \in \mathbb{R}^3$. *Dann ist* $B = (4, 3, 2)$ *eine Basis von* A *und es gilt*

$$\begin{aligned} x_B \;=\; A_B^{-1} \cdot b \;&=\; \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &=\; \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 9 & -3 \\ 4 & 18 & -2 \\ 3 & 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \;=\; (6,\, 8,\, 3) \;\in\; \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Die Basislösung $x = (0,\, 3,\, 8,\, 6,\, 0)$ *zur Basis* B *ist also zulässig. Weiterhin folgt unter Verwendung von* $c_B = (2,\, 0,\, -5) \in \mathbb{R}^3$

$$c^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A \;=\; \left(\tfrac{13}{2},\, 0,\, 0,\, 0,\, 1\right) \;\in\; \mathbb{R}^5.$$

Damit ist das Optimalitätskriterium erfüllt und zusammengefasst ist die Basislösung x zur Basis B eine Optimallösung des linearen Programms

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \;=\; b \quad \text{und} \quad x \;\geq\; 0$$

mit einem Zielfunktionswert von -3.

In Worten zusammengefasst haben wir in diesem Abschnitt Folgendes erreicht: Wir haben den Begriff der Basis eingeführt und gezeigt, dass es zu jeder Basis eine eindeutige Basislösung gibt. Weiterhin besagt der Hauptsatz der Optimierung, dass jedes zulässige und beschränkte lineare Programm eine Optimallösung besitzt, welche eine zulässige Basislösung ist. Weiterhin kann das Optimalitätskriterium herangezogen werden, um zu prüfen, ob die Basislösung einer Basis eine Optimallösung ist oder nicht. Insbesondere gilt es also eine Basis zu finden, welche das Optimalitätskriterium erfüllt.

Im folgenden Abschnitt werden wir diese Grundlagen algorithmisch nutzen, um schließlich lineare Programme in Standardform lösen zu können.

4 Primales Simplex-Verfahren

Zunächst wollen wir zeigen, wie wir von einer zulässige Basislösung zu einer weiteren zulässige Basislösung wechseln können, wobei der Zielfunktionswert in der Regel verbessert wird:

Herleitung *Gegeben sei wie im Abschnitt zuvor ein lineares Programm*

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \;=\; b \quad \text{und} \quad x \;\geq\; 0$$

mit $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, mit $b \in \mathbb{R}^m$ sowie mit $A = (a_1 \;\cdots\; a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dabei gelte $n \geq m$, der Rang von A sei gleich m und $a_j \in \mathbb{R}^n$ für $j = 1, \ldots, n$ seien die Spalten von A. Weiterhin sei $B \in \mathbb{R}^m$ eine Basis von A mit Nichtbasis $N \in \mathbb{R}^{n-m}$ sowie mit zulässiger Basislösung $x \in \mathbb{R}^n$. Wir wissen bereits, dass dann

$$x_B \;=\; A_B^{-1} \cdot b - A_B^{-1} \cdot A_N \cdot x_N \;\geq\; 0 \tag{7}$$

gilt, s. Gl. (4), sowie dass

$$c^\top \cdot x \;=\; c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot b + \left(c_N^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A_N\right) \cdot x_N \tag{8}$$

gilt, s. Gl. (5). Insbesondere können x_B und der Zielfunktionswert damit in Abhängigkeit der Nichtbasisvariablen x_N bestimmt werden, wobei in der gegebenen Basislösung zunächst $x_N = 0$ gilt.

Angenommen, das Optimalitätskriterium ist nicht erfüllt. Dann gibt es einen Spaltenindex $s \in \{1, \ldots, n\}$, welcher derzeit in der Nichtbasis enthalten ist, und für welchen

$$c_s - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot a_s \; < \; 0$$

gilt. Den Zielfunktionswert können wir nun verbessern, indem wir die Nichtbasisvariable zum Index s von 0 auf ein $\alpha \geq 0$ vergrößern, s. Gl. (8). Dabei muss jedoch berücksichtigt werden, dass die Lösung weiterhin zulässig bleiben soll, dass also weiterhin

$$x_B \; = \; A_B^{-1} \cdot b - A_B^{-1} \cdot a_s \cdot \alpha \; \geq \; 0$$

gilt, s. Gl. (7). Unter Verwendung der Notationen

$$d_B \; = \; (d_1, \ldots, d_m) \; = \; A_B^{-1} \cdot b \quad \text{und} \quad E_B \; = \; (e_{i,j}) \; = \; A_B^{-1} \cdot A \; \in \; \mathbb{R}^{m \times n}$$

kann die Gleichung zuvor komponentenweise geschrieben werden als

$$d_i - e_{i,s} \cdot \alpha \; \geq \; 0 \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, m. \tag{9}$$

Angenommen, $e_{i,s} \leq 0$, so kann $\alpha \geq 0$ beliebig gewählt werden, ohne dass die Bedingung (9) verletzt wird, denn es gilt $d_B = x_B \geq 0$ aufgrund der ursprünglichen Annahme einer zulässigen Lösung. Zusammengefasst bleibt die Lösung also weiterhin zulässig, falls

$$\alpha \; \leq \; \frac{d_i}{e_{i,s}} \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, m \text{ mit } e_{i,s} > 0$$

gilt. Da α so groß wie möglich gewählt werden soll, setzen wir schließlich

$$\alpha \; = \; \min \left\{ \frac{d_i}{e_{i,s}} \; : \; i = 1, \ldots, m \text{ mit } e_{i,s} > 0 \right\}$$

und erhalten damit eine neue zulässige Lösung, welche den Zielfunktionswert nicht verschlechtert.

Die Herleitung zuvor liefert uns nicht nur eine zulässige Lösung mit in der Regel besserem Zielfunktionswert, wir erhalten sogar wieder eine zulässige Basislösung:

Satz 4.1 (Basiswechsel) *Gegeben sei ein lineares Programm*

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \; = \; b \quad \text{und} \quad x \; \geq \; 0$$

mit $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, mit $b \in \mathbb{R}^m$ sowie mit $A = (a_1 \; \cdots \; a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dabei gelte $n \geq m$ und der Rang von A sei gleich m. Weiterhin sei B eine Basis von A mit zulässiger Basislösung und N sei die Nichtbasis von B. Darüber

!

hinaus definieren wir

$$\begin{aligned} d_B &= (d_1, \ldots, d_m) = A_B^{-1} \cdot b \in \mathbb{R}^m, \\ h_B &= (h_1, \ldots, h_n) = c^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A \in \mathbb{R}^n, \\ E_B &= (e_{i,j}) = A_B^{-1} \cdot A \in \mathbb{R}^{m \times n}. \end{aligned}$$

Dabei gilt nach Voraussetzung stets $d_B \geq 0$ *gilt. Wähle nun ein* $s \in \{1, \ldots, n\}$ *mit*

$$h_s = c_s - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot a_s < 0 \tag{10}$$

sowie ein $r \in \{1, \ldots, m\}$ *mit*

$$\frac{d_r}{e_{r,s}} = \alpha = \min \left\{ \frac{d_i}{e_{i,s}} \; : \; i = 1, \ldots, m \text{ mit } e_{i,s} > 0 \right\}. \tag{11}$$

Dann ist s in der Nichtbasis N enthalten. Wenn wir s mit dem r-ten Element der Basis austauschen, dann erhalten wir eine neue Basis mit zulässiger Basislösung, welchen den Zielfunktionswert um den Wert

$$-h_s \cdot \alpha \geq 0 \tag{12}$$

verkleinert (wobei durchaus $\alpha = 0$ *möglich ist).*

Das Vorgehen aus dem Satz zuvor wird als ***Basiswechsel*** bezeichnet, da wir je einen Index zwischen Basis und Nichtbasis austauschen und damit eine Basis mit weiterhin zulässiger Basislösung erhalten. Weiterhin sei bemerkt, dass dem Vektor h_B direkt entnommen werden kann, ob das Optimalitätskriterium erfüllt ist oder nicht.

Beispiel 4.1 *Gegeben sei der Kostenvektor* $c = (3, -5, 0, 2, 1) \in \mathbb{R}^5$ *sowie die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$$

und der Vektor $b = (-6, 9, -3) \in \mathbb{R}^3$*. Dann ist* $B = (4, 3, 1)$ *eine Basis von A und es gilt*

$$d_B = x_B = A_B^{-1} \cdot b = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ -2 & -3 & -5 \\ 3 & 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} = (9, 0, 6) \in \mathbb{R}^3.$$

Die Basislösung $x = (6, 0, 0, 9, 0)$ *zur Basis B ist also zulässig und sie besitzt den*

Zielfunktionswert 36*. Weiterhin folgt*

$$E_B \;=\; A_B^{-1} \cdot A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^{3\times 5}$$

sowie

$$h_B \;=\; c^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A \;=\; c^\top - c_B^\top \cdot E \;=\; (0, -13, 0, 0, 1) \;\in\; \mathbb{R}^5,$$

sodass das Optimalitätskriterium nicht erfüllt ist. Wir wählen $s = 2$*, da der zweite Eintrag von* h_B *der einzige negative Eintrag ist. Damit folgt*

$$\alpha \;=\; \min\left\{\frac{d_1}{e_{1,2}}, \frac{d_3}{e_{3,2}}\right\} \;=\; \min\left\{\frac{9}{1}, \frac{6}{2}\right\} \;=\; 3$$

und somit $r = 3$*, denn*

$$\frac{d_r}{e_{r,s}} \;=\; \frac{d_3}{e_{3,2}} \;=\; \frac{6}{2} \;=\; 3 \;=\; \alpha.$$

Der Basiswechsel ist daher anwendbar und als neue Basis erhalten wir $B = (4, 3, 2)$*, da wir den* r*-ten Eintrag von* B *durch* $s = 2$ *ersetzen. Diese Basis verbessert den Zielfunktionswert von* 36 *um* $13 \cdot 3$ *auf* -3*.*

Im Beispiel 3.5 haben wir bereits gesehen, dass die neue Basis $B = (4, 3, 2)$ *zu einer Optimallösung führt. Auch die Ergebnisse zum Zielfunktionswert von* -3 *stimmen überein.*

Falls kein $s \in \{1, \dots, n\}$ existiert, welches Gl. (10) erfüllt, so ist das Optimalitätskriterium erfüllt und die zulässige Basislösung ist eine Optimallösung des linearen Programms. Was aber passiert, wenn ein $s \in \{1, \dots, n\}$ existiert, welches Gl. (10) erfüllt, dann aber $e_{i,s} \leq 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ gilt, sodass kein $r \in \{1, \dots, m\}$ existiert, welches Gl. (11) erfüllt? In diesem Fall kann wie in der Herleitung zuvor erläutert die Nichtbasisvariable zum Index s beliebig vergrößert werden und die Lösung bleibt weiterhin zulässig. Damit kann der Zielfunktionswert aber beliebig klein werden, sodass offenbar ein unbeschränktes lineares Optimierungsproblem vorliegt:

Satz 4.2 *Es seien die gleichen Voraussetzungen und Notationen wie in Satz 4.1 zum Basiswechsel gegeben. Angenommen, es gibt ein* $s \in \{1, \dots, n\}$ *mit*

$$h_s \;=\; c_s - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot a_s \;<\; 0$$

und es gilt $e_{i,s} \leq 0$ *für alle* $i = 1, \dots, m$*.*

!

Dann ist das zugehörige lineare Programm unbeschränkt.

Mit den bislang erzielten Ergebnissen können wir nun bereits die grundlegende Idee des ***Simplex-Verfahrens*** zur Lösung von linearen Programmen in Standardform skizzieren: Angenommen, es ist eine Basis bekannt, welche eine zugehörige zulässige Basislösung besitzt. Dann führen wir solange einen Basiswechsel durch, bis wir eine Optimallösung erhalten oder herausfinden, dass das Problem unbeschränkt ist.

Offen ist die Frage, was für ein $s \in \{1, \ldots, n\}$ bzw. was für ein $r \in \{1, \ldots, m\}$ gewählt werden soll, falls es mehrere Indizes gibt, welche die Bedingungen (10) bzw. (11) erfüllen. Hierzu sind verschiedene Strategien möglich, welche als ***Pivotregeln*** bezeichnet werden. Je nach Eingabedaten haben unterschiedliche Pivotregeln verschiedene Vor- und Nachteile:

(1) Falls die Indizes s und r derart gewählt werden, dass wir pro Basiswechsel eine möglichst große Verbesserung des Zielfunktionswertes erhalten, s. Gl. (12), so konvergiert das Verfahren in der Regel vergleichsweise schnell. Andererseits kann diese Wahl dazu führen, dass das Simplex-Verfahren (zumindest theoretisch) nicht terminiert, s. Beale (1955).

(2) In Bland (1977) wird gezeigt, dass das Simplex-Verfahren stets endlich ist, falls die Indizes s und r gemäß Blands Pivotregel gewählt werden (Satz 4.3). Der Beweis kann beispielsweise in Hamacher und Klamroth (2006) nachgeschlagen werden. Der Nachteil dabei ist allerdings, dass das Verfahren häufig mehr Iterationen im Vergleich zu anderen Regeln benötigt.

(3) Kombiniert werden die Vor- bzw. Nachteile zuvor, indem zufällige Indizes s und r gewählt werden, welche die Bedingungen (10) und (11) erfüllen. Damit handelt es sich aber nicht mehr um ein deterministisches Verfahren, denn bei gleichen Eingabedaten kann es vorkommen, dass das Simplex-Verfahren unterschiedliche Lösungen (mit aber jeweils identischen Zielfunktionswerten) berechnet.

Bei der Wahl einer geeigneten Pivotregel ist neben der theoretischen Endlichkeit des Verfahrens sowie der Anzahl der Iterationen zum Finden einer Optimallösung auch die numerische Stabilität zu berücksichtigen. Beispielsweise können Pivotregel, welche jeweils den ersten möglichen Index verwenden, zu größeren Rechenungenauigkeiten führen im Vergleich zu anderen Regeln.

Trotz der zuvor beschriebenen Nachteile in der Laufzeit sowie der numerischen Stabilität kann die Endlichkeit des Simplex-Verfahrens nur mit wenigen Pivotregeln sichergestellt werden. Eine davon ist die folgende:

Satz 4.3 (Blands Pivotregel) *Es seien die gleichen Voraussetzungen und Notationen wie in Satz 4.1 zum Basiswechsel gegeben, wobei $B = (j_1, \ldots, j_m)$ die aktuelle Basis sei. Wähle die Indizes s und r nach den folgenden Regeln:*

(1) *Sei $S \subset \{1, \ldots, n\}$ die Menge aller Indizes, welche die Bedingung (10) erfüllen. Dann setze s als den kleinsten Wert aus S, d.h. wähle $s \in S$ mit $s = \min\{k \; : \; k \in S\}$.*

(2) *Sei $R \subset \{1, \ldots, m\}$ die Menge aller Indizes, welche die Bedingung (11) mit dem zuvor gewählten s erfüllen. Dann setze r als den Wert aus R mit kleinster Basisvariablen, d.h. wähle $r \in R$ mit $j_r = \min\{j_k \; : \; k \in R\}$.*

Unter Berücksichtigung dieser Regeln ist das Simplex-Verfahren endlich.

Häufig besteht die Menge R aus nur einem Element. Aber gerade falls dies nicht der Fall ist, d.h. falls das Minimum gemäß der Bedingung (11) für mehr als einen Index angenommen wird, dann ist Blands Pivotregel für die Endlichkeit des Verfahrens äußerst entscheidend.

Wir haben damit nun eine Aussage zur Endlichkeit formuliert, eine Aussage zur Komplexität des Simplex-Verfahrens lässt sich aber nicht so einfach treffen. Als Ausblick hierzu geben wir die folgenden Hinweise:

Ausblick *Gegeben sei ein lineares Programm*

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \; = \; b \quad \text{und} \quad x \; \geq \; 0$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, mit $b \in \mathbb{R}^m$ sowie mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dabei gelte $n \geq m$ und der Rang von A sei gleich m.

Wir nennen eine Basislösung einer Basis B ***degeneriert*** *oder* ***entartet****, falls mindestens eine Basisvariable (d.h. mindestens ein Eintrag von x_B) den Wert 0 annimmt.*

Angenommen, das lineare Programm besitzt ausschließlich nichtentartete Basislösungen, dann wird sich der Zielfunktionswert bei jedem Basiswechsel echt verbessern (unabhängig von der gewählten Pivotregel). Dies wiederum hat zur Folge, dass das Simplex-Verfahren maximal jede Basis einmal untersucht, sodass das Verfahren nach spätestens

$$\binom{n}{m}$$

Schritten terminiert. In Klee und Minty (1972) wird ein Beispiel präsentiert, für welches das Simplex-Verfahren tatsächlich diese maximale Anzahl an Schritten benötigt.

Diese Aussagen lassen darauf schließen, dass das Simplex-Verfahren im Allgemeinen eine in Abhängigkeit von n exponentielle Laufzeit besitzt. Andererseits wurde in Borgwardt (1982) gezeigt, dass unter der Annahme von zufälligen Eingabedaten das Simplex-Verfahren im Mittel nach einer in n polynomiellen Laufzeit terminiert.

Wir fassen nun das Simplex-Verfahren dank der Ergebnisse bislang in einer ersten Version zusammen. Anschließend werden wir beschreiben, wie das Verfahren algorithmisch sinnvoll angewandt werden kann.

Zusammenfassung 4.1 (Primales Simplex-Verfahren) Gegeben sei ein lineares Programm in Standardform, d.h.

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x = b \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, mit $b \in \mathbb{R}^m$ sowie mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dabei gelte $n \geq m$ und der Rang von A sei gleich m. Weiterhin sei B eine Basis von A mit zulässiger Basislösung.

(1) Prüfe, ob das Optimalitätskriterium zur aktuellen Basis B erfüllt ist (Satz 3.4). Falls ja, so terminiert das Verfahren und die Basislösung der aktuellen Basis ist eine Optimallösung des linearen Programms.

(2) Prüfe unter Verwendung von Satz 4.2, ob das lineare Programm unbeschränkt ist. Falls ja, so terminiert das Verfahren mit der Aussage, dass das lineare Programm unbeschränkt ist.

(3) Führe einen Basiswechsel unter Verwendung einer geeigneten Pivotregel durch (Satz 4.1). Genauer tauschen wir einen Index zwischen Basis und Nichtbasis aus und erhalten eine neue Basis B mit weiterhin zulässiger Basislösung.

(4) Gehe zurück zu Schritt **(1)**.

Falls in Schritt **(3)** Blands Pivotregel verwendet wird (Satz 4.3), so ist theoretisch sichergestellt, dass das Verfahren terminiert. Unter Verwendung anderer Pivotregeln kann die Anzahl der Iterationen in parktischen Fällen jedoch meist deutlich reduziert werden.

Dabei stellt sich weiterhin die Frage, wie überhaupt eine erste Basis B mit zulässiger Basislösung gefunden werden kann (bzw. wie entschieden werden kann, ob das lineare Programm überhaupt zulässig ist). Diese Frage werden wir weiter unten beantworten.

Zunächst aber wollen wir zeigen, wie das Simplex-Verfahren algorithmisch sinnvoll genutzt werden kann. Inbesondere wollen wir vermeiden, nach jeden Basiswechsel die inverse Matrix von A_B explizit bestimmen zu müssen. Dazu seien die Voraussetzung wie zuvor gegeben und wir definieren die Matrix T durch

$$T \;=\; \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & c^\top & 0 \\ \hline 0 & A & b \end{array}\right) \;=\; \left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & c_1 & \dots & c_n & 0 \\ \hline 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right) \;\in\; \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+2)}.$$

Diese Matrix wird auch als ***Ausgangstableau*** bezeichnet, sodass jedes lineare Programm in Standardform durch sein Ausgangstableau eindeutig beschrieben werden kann. Zu einer Basis B definieren wir die Matrix

$$T_B \;=\; \left(\begin{array}{c|c} 1 & c_B^\top \\ \hline 0 & A_B \end{array}\right) \;\in\; \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$$

und da A_B regulär ist, ist auch T_B regulär. Es lässt sich leicht prüfen, dass dabei

$$T_B^{-1} \;=\; \left(\begin{array}{c|c} 1 & -c_B^\top \cdot A_B^{-1} \\ \hline 0 & A_B^{-1} \end{array}\right) \;\in\; \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$$

gilt. Als ***Simplex-Tableau*** zu einer Basis B definieren wir schließlich die Matrix $S_B \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+2)}$ durch

$$\begin{aligned} S_B \;&=\; T_B^{-1} \cdot T \\ &=\; \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & c^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A & -c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot b \\ \hline 0 & A_B^{-1} \cdot A & A_B^{-1} \cdot b \end{array}\right) \;=\; \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & h_B & -c_B^\top \cdot x_B \\ \hline 0 & E_B & d_B \end{array}\right), \end{aligned}$$

wobei wie zuvor die Notationen

$$d_B \;=\; x_B \;=\; A_B^{-1} \cdot b, \quad E_B \;=\; A_B^{-1} \cdot A \quad \text{und} \quad h_B \;=\; c^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A$$

verwendet wurden. Das Besondere am Simplex-Tableau sind nun folgende Beobachtungen:

(1) Anhand des Ausdrucks $h_B = c^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A$ in der ersten Zeile kann unter Verwendung des Optimalitätskriteriums direkt geprüft werde, ob die Basislösung zur Basis B eine Optimallösung ist, s. Gl. (6).

(2) Angenommen, das Optimalitätskriterium ist nicht erfüllt, so ist ein Basiswechsel durchzuführen. Die Bedingungen (10) und (11) zur Wahl der entsprechenden Indizes können dabei einfach bestimmt werden, da das Simplex-Tableau die Matrix E_B sowie den Vektor d_B enthält.

(3) Darüber hinaus kann in der oberen rechten Ecke des Simplex-Tableaus direkt das Negative des Zielfunktionswertes zur Basislösung der aktuellen Basis B abgelesen werden.

Weiterhin sei bemerkt, dass jedes Simplex-Tableau S_B unter Verwendung des Ausgangstableaus T auch ohne explizite Bestimmung und Multiplikation von T_B^{-1} bestimmt werden kann. Dazu müssen wir die zur Basis B gehörenden Spalten jeweils (samt der ersten Zeile) durch Anwendung elementarer Zeilenoperationen in die entsprechenden Einheitsvektoren überführen.

Um zudem ausgehend von einem Simplex-Tableau S_B mit zulässiger Basislösung einen Basiswechsel zu den Indizes s und r durchzuführen, muss das Simplex-Tableau zur neuen Basis B nicht mehr vollständig neu aufgestellt werden. Vielmehr ergibt sich das neue Tableau aus dem aktuellen Tableau, indem durch Anwendung elementarer Zeilenoperationen die Spalte zum Index s in den entsprechenden r-ten Einheitsvektor überführt wird. Dies ist aufgrund der Bedingungen des Basiswechsels auch immer möglich.

Das folgende Beispiel demonstriert das zuvor beschriebene Verfahren:

Beispiel 4.2 *Gegeben sei der Kostenvektor* $c = (3,\, -5,\, 0,\, 2,\, 1) \in \mathbb{R}^5$ *sowie die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$$

und der Vektor $b = (-6,\, 9,\, -3) \in \mathbb{R}^3$. *Wir erhalten das Ausgangstableau*

$$T = \left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 3 & -5 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 5 & -2 & 3 & -4 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

Weiterhin wissen wir bereits, dass $B = (4, 3, 1)$ *eine Basis von* A *mit zulässiger Basislösung ist. Wir erhalten das zugehörige Simplex-Tableau* $S_{(4,3,1)}$, *indem wir im Ausgangstableau die zur Basis* $B = (4, 3, 1)$ *gehörenden Spalten (samt der ersten Zeile) durch Anwendung elementarer Zeilenoperationen in die entsprechenden Einheitsvektoren überführen. Es ergibt sich*

$$S_{(4,3,1)} = \left(\begin{array}{c|ccccc|r} 1 & 0 & -13 & 0 & 0 & 1 & -36 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right).$$

Aufgrund des negativen Eintrags mit -13 *in der ersten Zeile ist das Optimalitätskriterium nicht erfüllt. Die Bedingungen zum Basiswechsel sind mit* $s = 2$ *und* $r = 3$ *eindeutig bestimmt und der zugehörige Eintrag im Simplex-Tableau ist die* 2 *in der untersten Zeile (s. auch Beispiel 4.1). Um das Simplex-Tableau* $S_{(4,3,2)}$ *zur neuen Basis* $B = (4, 3, 2)$ *zu erhalten, müssen wir die entsprechende Spalte* *von $S_{(4,3,1)}$ durch Anwendung elementarer Zeilenoperationen in den entsprechenden Einheitsvektor überführen. Wir erhalten*

$$S_{(4,3,2)} \;=\; \left(\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & \frac{13}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Nun ist das Optimalitätskriterium offenbar erfüllt und aus dem Simplex-Tableau lässt sich die Basislösung $x = (0, 3, 8, 6, 0)$ mit Zielfunktionswert -3 ablesen.

Aufgabe 4.1 Begründe, warum die erste Spalte in jedem Simplex-Tableau S_B identisch ist (und somit auch ignoriert werden kann).

?

Das zuvor beschriebene Simplex-Verfahren lässt sich also algorithmisch durch Anwendung elementarer Zeilenoperationen durchführen und auch die Endlichkeit des Verfahrens ist unter Verwendung geeigneter Pivotregeln wie oben bereits erläutert sichergestellt. Die einzige noch offene Frage lautet weiterhin, wie überhaupt eine erste Basis B mit zulässiger Basislösung gefunden werden kann. Als Spezialfall erhalten wir folgendes Ergebnis für stets zulässige lineare Programme mit Ungleichungen als Nebenbedingungen:

Lemma 4.4 *Gegeben sei ein **Ausgangsproblem***

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \;\le\; b \quad \text{und} \quad x \;\ge\; 0 \tag{13}$$

*mit $c \in \mathbb{R}^n$, mit $b \in \mathbb{R}^m$ sowie mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Weiterhin setzen wir voraus, dass $b \ge 0$ gilt. Als zugehöriges lineares Programm in Standardform definieren wir das **Hilfsproblem***

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x + I_m \cdot z \;=\; b \quad \text{und} \quad x, z \;\ge\; 0. \tag{14}$$

Dabei sei I_m die $(m \times m)$-Einheitsmatrix. Dann ist

$$B \;=\; (n+1,\, n+2,\, \ldots,\, n+m)$$

eine zugehörige Basis mit zulässiger Basislösung. Somit kann das Hilfsproblem (14) und damit auch das Ausgangsproblem mit dem Simplex-Verfahren aus Zusammenfassung 4.1 gelöst werden.

!

In Worten beschrieben hat Lemma 4.4 folgende Aussage: Wenn ein Ausgangsproblem der Form (13) in Standardform überführt wird, dann erhalten wir aufgrund der Einführung der m Schlupfvariablen direkt eine Basis, welche aufgrund der Annahme, dass $b \geq 0$ gilt, sogar zulässig ist.

Beispiel 4.3 *Das lineare Optimierungsproblem*

$$\max c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \leq b \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

zur Produktionsplanung aus Beispiel 1.1 erfüllt die Bedingungen von Lemma 4.4, da nur positive Verfügbarkeiten der Maschinen sinnvoll sind und somit $b \geq 0$ angenommen werden kann. Daher kann jedes Produktionsproblem aufgrund von Lemma 4.4 direkt mit dem Simplex-Verfahren aus Zusammenfassung 4.1 gelöst werden, wobei zu berücksichtigen ist, dass das Maximierungsproblen zunächst in ein Minimierungsproblem zu überführen ist.

Zur numerischen Analyse der Laufzeit des Simplex-Verfahrens wurden diverse Produktionsprobleme gelöst, wobei die Eingabedaten folgendermaßen generiert wurden: Es wurde stets $m = n$ gesetzt, sodass die Anzahl der Maschinen gleich der Anzahl der Produkte ist. Weiterhin wurde $c_j \in [0, 10]$ für $j = 1, \ldots, n$ sowie $b_i \in [100, 300]$ für $i = 1, \ldots, m$ zufällig gewählt. Die Einträge der Matrix A wurde derart erzeugt, dass für etwa 80 % der Einträge $a_{i,j} = 0$ galt. Für alle anderen Einträge wurde $a_{i,j} \in [0, 10]$ zufällig gewählt.

Unter Verwendung dieser Strategie zur Erzeugung von zufälligen Eingabedaten wurden insgesamt 200 Produktionsprobleme mit $m \leq 100$ jeweils unter Anwendung folgender Pivotregel gelöst:

(1) ***Pivotregel der steilsten Kante****. Die Indizes s und r wurden derart gewählt, dass sich je Basiswechsel eine möglichst große Verbesserung des Zielfunktionswertes ergibt.*

(2) ***Blands Pivotregel****. Die Indizes s und r wurden gemäß Blands Pivotregel gewählt (Satz 4.3).*

(3) ***Zufällige Pivotstrategie****. Die Indizes s und r wurden unter allen möglichen Indizes, welche zu einem zulässigen Basiswechsel führen, rein zufällig gewählt.*

Abb. 1 zeigt die Anzahl der Iterationen des Simplex-Verfahrens in Abhängigkeit der Anzahl m der Maschinen jeweils unter Anwendung der unterschiedlichen Pivotregeln. Erwartungsgemäß steigt die Anzahl der Iterationen für alle drei Pivotregeln mit der Anzahl m der Maschinen an. Zudem zeigt die Analyse, dass Blands Pivotregel zu deutlich mehr Iterationen im Vergleich zu den anderen beiden Pivotregeln führt, insbesondere im Vergleich zur Pivotregel der steilsten Kante. Insgesamt lässt sich daher folgern, dass die Wahl einer geeigneten Pivotregel insbesondere für große Probleme einen großen Einfluss auf die Laufzeit des Simplex-Verfahrens haben kann.

Aber auch falls die Bedingungen aus Lemma 4.4 nicht erfüllt sind, lässt sich eine

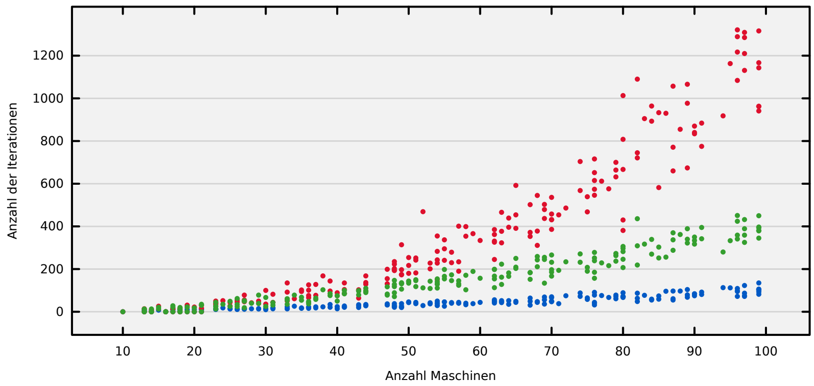


Abb. 1 Numerische Analyse zur Laufzeit des Simplex-Verfahrens. Aufgetragen sind die Anzahl der benötigten Iterationen zur Lösung des Produktionsproblem gegen die Anzahl m der Maschinen, wobei alle Probleme jeweils mehrfach unter Verwendung folgender Pivotregeln gelöst wurden: Pivotregel der steilsten Kante (blau), Blands Pivotregel (rot) sowie zufällige Pivotstrategie (grün)

Ausgangsbasis zur Anwendung des Simplex-Verfahrens konstruieren. Das Vorgehen dazu werden wir nun herleiten:

Herleitung *Gegeben sei ein lineares Programm*

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \;=\; b \quad \text{und} \quad x \;\geq\; 0$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$*, mit* $b \in \mathbb{R}^m$ *sowie mit* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$*. Dabei gelte* $n \geq m$ *und der Rang von* A *sei gleich* m*.*

Weiterhin setzen wir voraus, dass $b \geq 0$ *gilt. Auch diese Annahme kann ohne Einschränkungen getroffen werden, da negative Elemente von* b *sowie entsprechende Zeilen von* A *mit* -1 *multipliziert werden können, ohne den Lösungsraum des Gleichungssystems* $A \cdot x = b$ *zu verändern.*

Zum gegebenen linearen Programm definieren wir das Hilfsproblem

$$\min e^\top \cdot z, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x + I_m \cdot z \;=\; b \quad \text{und} \quad x, z \;\geq\; 0.$$

Dabei gelte $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$ *und* I_m *sei die* $(m \times m)$*-Einheitsmatrix. Wir erhalten somit ein lineares Programm in Standardform mit insgesamt* $n + m$ *Variablen, da wir mit* $z \in \mathbb{R}^m$ *zusätzliche Variablen definiert haben. Aus der Definition des Hilfsproblems ergeben sich direkt folgende Eigenschaften:*

(1) *Das Hilfsproblem ist zulässig, denn mit* $x = 0$ *und* $z = b$ *erhalten wir aufgrund der Annahme, dass* $b \geq 0$ *gilt, eine zulässige Lösung. Weiterhin handelt es sich dabei sogar um eine zulässige Basislösung zur Basis*

$$B \;=\; (n+1, n+2, \ldots, n+m),$$

denn die zugehörigen Spalten bilden genau die $(m \times m)$-Einheitsmatrix.

(2) *Das Hilfsproblem ist beschränkt, denn mit $z \geq 0$ ist 0 der bestmögliche Zielfunktionswert.*

Insbesondere können wir dank der bekannten Basis mit zulässiger Basislösung das Simplex-Verfahren aus Zusammenfassung 4.1 anwenden, um das Hilfsproblem zu lösen. Der folgende Satz liefert schließlich den gewünschten Zusammenhang zwischen linearem Programm und zugehörigem Hilfsproblem.

Satz 4.5 *Gegeben sei ein* ***Ausgangsproblem***

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x = b \quad \text{und} \quad x \geq 0 \tag{15}$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, mit $b \in \mathbb{R}^m$ sowie mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dabei gelte $n \geq m$ und der Rang von A sei gleich m. Weiterhin setzen wir voraus, dass $b \geq 0$ gilt. Als zugehöriges ***Hilfsproblem*** *definieren wir*

$$\min e^\top \cdot z, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x + I_m \cdot z = b \quad \text{und} \quad x, z \geq 0. \tag{16}$$

Dabei gelte $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$ und I_m sei die $(m \times m)$-Einheitsmatrix. Dann ist

$$B = (n+1, n+2, \ldots, n+m)$$

eine Basis mit zulässiger Basislösung, sodass das Hilfsproblem (16) mit dem Simplex-Verfahren aus Zusammenfassung 4.1 gelöst werden kann. Weiterhin ist das Hilfsproblem beschränkt und es kann keinen besseren Zielfunktionswert als 0 besitzten.

Darüber hinaus ist das lineare Programm (15) genau dann zulässig, falls das zugehörige Hilfsproblem eine Optimallösung mit Zielfunktionswert 0 besitzt.

Beispiel 4.4 *Gegeben sei der Kostenvektor $c = (3, -5, 0, 2, 1) \in \mathbb{R}^5$ sowie die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$$

und der Vektor $b = (-6, 9, -3) \in \mathbb{R}^3$. Das Ausgangstableau des zugehörigen Hilfsproblems lautet

$$T = \left(\begin{array}{c|cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -5 & 2 & -3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

und $B = (6,7,8)$ ist eine Basis des Hilfsproblems mit zulässiger Basislösung. Dabei ist zu beachten, dass wir die erste und dritte Zeile von A sowie die entsprechenden Elemente von b bereits mit -1 multipliziert haben, damit $b \geq 0$ gilt und wir somit eine zulässige Basislösung erhalten. Damit wir das Simplex-Verfahren anwenden können, starten wir also mit dem Simplex-Tableau

$$S_{(6,7,8)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 \\ \hline 0 & -5 & 2 & -3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

wobei im Vergleich zum Ausgangstableau lediglich die erste Zeile durch Anwendung elementarer Zeilenoperationen verändert wurde.

Es bleibt noch zu klären, wie wir aus der Lösung des Hilfsproblems eine zulässige Basislösung des Ausgangsproblems konstruieren können. Dazu nehmen wir an, dass das Hilfsproblem eine Optimallösung mit Zielfunktionswert 0 besitzt (anderenfalls ist das Ausgangsproblem auch gar nicht zulässig). Das Simplex-Verfahren angewandt auf das Hilfsproblem terminiert also mit einer Basis

$$B = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathbb{R}^m,$$

dessen Basislösung eine Optimallösung des Hilfsproblems ist. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

(1) Angenommen, es gilt $j_k \leq n$ für $k = 1, \ldots, m$. Dann ist die zugehörige Basis B auch eine Basis von A mit zulässiger Basislösung, sodass wir das Simplex-Verfahren auf das Ausgangsproblem anwenden können (Beispiel 4.5).

(2) Angenommen, es gilt $j_s > n$ für ein $s \in \{1, \ldots, m\}$. Dann können wir aufgrund der Annahme, dass der Rang von A gleich m ist, einen Basiswechsel dahingehend durchführen, dass wir statt j_s einen neuen Index j_r mit $j_r \leq n$ in die Basis aufnehmen. Dabei sind die Basislösungen von alter und neuer Basis stets identisch und auch der Zielfunktionswert von 0 ändert sich nicht (Beispiel 4.6).

Häufig wird das Lösen des Hilfsproblems (und damit das Finden einer Basis mit zulässiger Basislösung für das Ausgangsproblem) als ***Phase 1*** und das eigentliche Lösen des Ausgangsproblems unter Verwendung der zuvor gefundenen Basis als ***Phase 2*** bezeichnet, da das Simplex-Verfahren aus Zusammenfassung 4.1 insgesamt zweimal durchlaufen wird.

Beispiel 4.5 *Gegeben sei der Kostenvektor $c = (3, -5, 0, 2, 1) \in \mathbb{R}^5$ sowie die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$$

und der Vektor $b = (-6,\, 9,\, -3) \in \mathbb{R}^3$. *Das Ausgangstableau des zugehörigen Hilfsproblems lautet*

$$T \;=\; \left(\begin{array}{c|cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -5 & 2 & -3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

(s. auch Beispiel 4.4). Unter Verwendung der Ausgangsbasis $B = (6, 7, 8)$ *terminiert das Verfahren je nach Pivotregel beispielsweise mit dem folgenden Tableau zur Basis* $B = (4, 1, 5)$*:*

$$S_{(4,1,5)} \;=\; \left(\begin{array}{c|cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 3 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{5}{3} & 0 \end{array}\right).$$

Wie sich am rechten oberen Element ablesen lässt, ist der Zielfunktionswert der zugehörigen Optimallösung gleich 0*, sodass das Ausgangsproblem zulässig ist. Weiterhin sind alle Elemente der Basis* $B = (4, 1, 5)$ *kleiner gleich* $n = 5$*, sodass* $B = (4, 1, 5)$ *auch eine Basis von* A *mit zulässiger Basislösung ist. Genauer kann Phase 2 des Simplex-Verfahrens mit dem Ausgangstableau*

$$T \;=\; \left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 3 & -5 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

sowie der Basis $B = (4, 1, 5)$ *begonnen werden.*

Aufgabe 4.2 Angenommen, das Hilfsproblem besitzt eine Optimallösung mit Zielfunktionswert 0. Weiter sei

$$B \;=\; (j_1,\, \ldots,\, j_m) \;\in\; \mathbb{R}^m$$

eine Basis, dessen Basislösung eine Optimallösung des Hilfsproblems ist. Weiterhin gelte $x_B > 0$, d.h. in der letzten Spalte des zugehörigen Simplex-Tableaus S_B stehen (mit Ausnahme der ersten Kostenzeile) nur echt positive Einträge.

Zeige, dass dann $j_k \le n$ für $k = 1, \ldots, m$ gilt, sodass B eine Basis von A ist.

Beispiel 4.6 *Gegeben sei der Kostenvektor* $c = (3,\, -5,\, 0,\, 2,\, 1) \in \mathbb{R}^5$ *sowie die*

Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$$

und der Vektor $b = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. *Damit sind die Daten bis auf den Vektor* b *identisch zum Beispiel zuvor. Das Ausgangstableau des zugehörigen Hilfsproblems lautet*

$$T = \left(\begin{array}{c|cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 5 & -2 & 3 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Unter Verwendung der Ausgangsbasis $B = (6, 7, 8)$ *terminiert das Verfahren je nach Pivotregel beispielsweise mit dem folgenden Tableau zur Basis* $B = (2, 4, 8)$*:*

$$S_{(2,4,8)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc|c} 1 & 12 & 0 & 9 & 0 & 3 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{5}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & -9 & 0 & -3 & -2 & -9 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Für den dritten Index der Basis gilt $8 > n = 5$, *sodass die Basis* $B = (2, 4, 8)$ *nicht als Basis von* A *verwendet werden kann. Allerdings können wir einen Basiswechsel derart durchführen, dass der Zielfunktionswert nicht verändert wird und auch das Optimalitätskriterium weiterhin erfüllt bleibt.*

Wir entscheiden uns dafür, den Index 8 *durch den Index* 5 *zu ersetzen. Der entsprechende Basiswechsel führt zu folgendem Tableau:*

$$S_{(2,4,5)} = \left(\begin{array}{c|cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 3 & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right).$$

Da die Basis $B = (2, 4, 5)$ *nun auch eine Basis von* A *ist, kann Phase 2 des Simplex-Verfahrens mit dem Ausgangstableau*

$$T = \left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 3 & -5 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

sowie der Basis $B = (2, 4, 5)$ *begonnen werden.*

Zusammenfassend kann durch das Lösen des Hilfsproblems entschieden werden, ob das Ausgangsproblem zulässig ist oder nicht. Falls es zulässig ist, können wir aus der Lösung des Hilfsproblems eine Basis des Ausgangsproblems mit zulässiger Basislösung konstruieren, sodass anschließend auch das Ausgangsproblem mit dem Simplex-Verfahren aus Zusammenfassung 4.1 gelöst werden kann.

#

Zusammenfassung 4.2 (Finden einer zulässigen Basislösung) Gegeben sei ein ***Ausgangsproblem***

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \;=\; b \quad \text{und} \quad x \;\geq\; 0$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, mit $b \in \mathbb{R}^m$ sowie mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dabei gelte $n \geq m$ und der Rang von A sei gleich m. Weiterhin setzen wir voraus, dass $b \geq 0$ gilt. Als zugehöriges ***Hilfsproblem*** definieren wir

$$\min e^\top \cdot z, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x + I_m \cdot z \;=\; b \quad \text{und} \quad x, z \;\geq\; 0.$$

Dabei gelte $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$ und I_m sei die $(m \times m)$-Einheitsmatrix.

Dann lässt sich das Hilfsproblem mit dem Simplex-Verfahren aus Zusammenfassung 4.1 unter Verwendung der Ausgangsbasis

$$B \;=\; (n+1,\, n+2,\, \ldots,\, n+m)$$

lösen, d.h. wir erhalten stets eine zulässige Basislösung, welche eine Optimallösung des Hilfsproblems ist. Dabei gilt:

(1) Falls die Optimallösung des Hilfsproblems einen Zielfunktionswert echt größer 0 besitzt, so ist das Ausgangsproblem unzulässig.

(2) Falls die Optimallösung des Hilfsproblems einen Zielfunktionswert gleich 0 besitzt, so ist das Ausgangsproblem zulässig.

Weiterhin kann die Basis, mit der das Simplex-Verfahren zur Lösung des Hilfsproblems terminiert, als Ausgangsbasis zur Lösung des Ausgangsproblems verwendet werden (oder eine derartige Basis kann wie zuvor beschrieben konstruiert werden).

Wir sind damit schließlich in der Lage, jedes lineare Programm (in Standardform) durch zweimalige Anwendung des Simplex-Verfahrens aus Zusammenfassung 4.1 zu lösen (bzw. herauszufinden, dass das Programm unzulässig oder unbeschränkt ist).

Beispiel 4.7 *Abschließend greifen wir das Transportproblem aus Beispiel 1.2 auf und lösen dieses unter Verwendung des primalen Simplex-Verfahrens.*

Dazu definieren wir r *Angebotsorte mit zufälligen Koordinaten* $g_1, \ldots, g_r \in [0, 10]^2$ *sowie* s *Nachfrageorte ebenfalls mit zufälligen Koordinaten* $h_1, \ldots, h_s \in [0, 10]^2$*. Auch für die zu transportierenden Mengen wählen wir zufällige Werte, nämlich* $u_1, \ldots, u_r \in [0, 100]$ *sowie* $w_1, \ldots, w_s \in [0, 100]$*, wobei jeweils sichergestellt werden muss, dass*

$$\sum_{i=1}^{r} u_i \;=\; \sum_{j=1}^{s} w_j$$

gilt. Weiterhin definieren wir die Transportkosten $c_{i,j}$ *zwischen* g_i *und* h_j *durch die euklidische Norm, genauer durch*

$$c_{i,j} \;=\; \|g_i - h_j\|_2.$$

Unter Verwendung dieser Eingabedaten wurde das Transportproblem

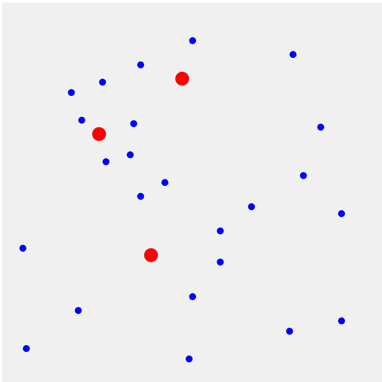
$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} c_{i,j}\cdot x_{i,j}\,, \qquad \text{sodass} \qquad \sum_{i=1}^{r} x_{i,j} \;&=\; w_j \qquad \text{für } j = 1, \ldots, s, \\ \sum_{j=1}^{s} x_{i,j} \;&=\; u_i \qquad \text{für } i = 1, \ldots, r, \\ x_{i,j} \;&\geq\; 0 \end{aligned}$$

gelöst. Abb. 2 veranschaulicht exemplarisch die Lösung des Transportproblems mit derart generierten Eingabedaten.

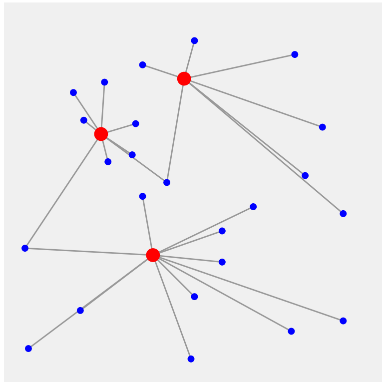
Zur weiteren Analyse der Laufzeit des Simplex-Verfahrens wurden diverse Transportprobleme mit zufälligen Eingabedaten generiert, wobei stets $r = 4$ *Angebotsorte aber eine unterschiedliche Anzahl von Nachfrageorten* s *definiert wurden. Abb. 3 zeigt die Anzahl der Iterationen des Simplex-Verfahrens in Abhängigkeit der Nachfrageorte. Demnach scheint die Anzahl der benötigten Iterationen linear mit der Anzahl der Nachfrageorte und somit linear mit der Anzahl der Variablen des linearen Programms zu wachsen. Diese Beobachtung ist insbesondere von der theoretischen Sichtweise alles andere als trivial. In praktischen Beispielen wie dem Transportproblem sind erfreulicherweise jedoch häufig lineare Zusammenhänge zwischen der Anzahl der Variablen und der notwendigen Iterationen zur Lösung des Problems zu beobachten.*

5 Dualität

In diesem Abschnitt fassen wir einige Theorie zusammen, welche uns im folgenden Abschnitt eine weitere Simplex-Variante ermöglichen wird. Die grundlegende



a Eingabedaten zum Transportproblem



b Lösung des Transportproblems

Abb. 2 Exemplarisches Beispiel zum Transportproblem mit $r = 3$ Angebotsorten (rot) sowie $s = 24$ Nachfrageorten (blau). **a** zeigt die zufällig gewählten Koordianten der Standorte und **b** zeigt die Lösung des Problems. Dabei bedeutet eine Linie zwischen Angebots- und Nachfrageort, dass ein Gütertransport zwischen diesen Orten stattfindet

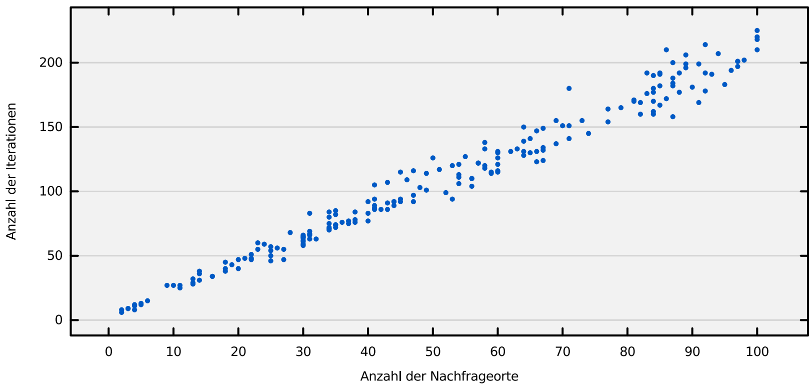


Abb. 3 Numerische Analyse zur Laufzeit des Simplex-Verfahrens. Aufgetragen sind die Anzahl der benötigten Iterationen (Summe aus Phase 1 und Phase 2) zur Lösung des Transportproblems gegen die Anzahl s der Nachfrageorte (wobei stets $r = 4$ Angebotsorte definiert wurden)

Definition dazu soll zunächst anhand folgender Herleitung motiviert werden:

Herleitung *Gegeben sei ein zulässiges und beschränktes lineares Programm*

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \;=\; b \quad \text{und} \quad x \;\geq\; 0$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$*, mit* $b \in \mathbb{R}^m$ *sowie mit* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$*. Dabei gelte* $n \geq m$ *und der Rang von* A *sei gleich* m*.*

Weiterhin sei $B \in \mathbb{R}^m$ *eine Basis von* A*, dessen zugehörige Basislösung das Optimalitätskriterium*

$$c^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A \;\geq\; 0$$

erfüllt (Satz 3.4). Unter Verwendung von

$$y^\top \;=\; c_B^\top \cdot A_B^{-1} \;\in\; \mathbb{R}^m$$

erhalten wir folgende äquivalent Darstellung:

$$y^\top \cdot A \;\leq\; c^\top.$$

Sei nun andererseits $y \in \mathbb{R}^m$ *ein beliebiger Vektor, welcher die Gleichung zuvor erfüllt, sowie* $x \geq 0$ *ein beliebiger Vektor mit* $A \cdot x = b$*. Dann folgt*

$$b^\top \cdot y \;=\; y^\top \cdot b \;=\; y^\top \cdot (A \cdot x) \;= (y^\top \cdot A) \cdot x \;\leq\; c^\top \cdot x.$$

Dies bedeutet zusammengefasst: Für alle $y \in \mathbb{R}^m$*, welche* $y^\top \cdot A \leq c^\top$ *erfüllen, folgt unter den zuvor genannten Voraussetzungen* $b^\top \cdot y \leq c^\top \cdot x$*.*

Unter Verwendung der in der linearen Optimierung üblichen Schreibweise $y \lesseqgtr 0$ anstelle von $y \in \mathbb{R}^m$ führt uns die Herleitung zu folgender Definition:

Definition 5.1 *Gegeben sei ein* ***primales*** *lineares Programm*

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \;=\; b \quad \text{und} \quad x \;\geq\; 0 \tag{17}$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$*, mit* $b \in \mathbb{R}^m$ *sowie mit* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$*. Dabei gelte* $n \geq m$ *und der Rang von* A *sei gleich* m*. Dann definieren wir das zugehörige* ***duale*** *lineare Programm durch*

$$\max b^\top \cdot y, \qquad \text{sodass} \qquad y^\top \cdot A \;\leq\; c^\top \quad \text{und} \quad y \;\lesseqgtr\; 0. \tag{18}$$

Die beiden linearen Programme werden kurz als ***Primales*** *und* ***Duales*** *bezeichnet.*

Damit haben wir das Duale für ein (primales) lineares Programm in Standardform formuliert. Auf ähnlich Weise lässt sich auch das Duale eines linearen Programms in allgemeiner Form definieren, darauf wollen wir aber nicht weiter eingehen.

?

Aufgabe 5.1 Zeige, dass das Duale eines Dualen stets das Primale liefert. Überführe dazu das duale lineare Programm (18) in Standardform und stelle anschließend das zugehörige Duale auf. Zeige danach, dass das somit erhaltene Duale des Dualen identisch zum ursprünglichen Primalen (17) ist.

In der Herleitung zuvor haben wir bereits folgenden Zusammenhang zwischen primalen und dualen linearen Programmen gezeigt:

!

Lemma 5.1 (Schwache Dualität) *Gegeben sei ein primales lineares Programm (17) sowie das zugehörige duale lineare Programm (18). Weiter sei x zulässig für das Primale und y zulässig für das Duale. Dann gilt*

$$b^\top \cdot y \;\leq\; c^\top \cdot x.$$

Jede zulässige Lösung des Dualen liefert somit eine untere Schranke an den optimalen Zielfunktionswert des Primalen.

Das wesentliche Ergebnis der Dualität ist die folgende Aussage, welche eine Folgerung des Hauptsatzes der linearen Optimierung ist:

!

Satz 5.2 (Starke Dualität) *Gegeben sei ein primales lineares Programm (17) sowie das zugehörige duale lineare Programm (18). Dann gilt:*

(1) *Hat das Primale eine beschränkte Optimallösung, dann hat auch das Duale eine beschränkte Optimallösung und die optimalen Zielfunktionswerte sind identisch.*

(2) *Hat das Duale eine beschränkte Optimallösung, dann hat auch das Primale eine beschränkte Optimallösung und die optimalen Zielfunktionswerte sind identisch.*

(3) *Ist das Primale unbeschränkt, so ist das Duale unzulässig.*

(4) *Ist das Duale unbeschränkt, so ist das Primale unzulässig.*

Weiterhin können Primales und Duales gleichzeitig unzulässig sein.

Als Folgerung aus der starken Dualität schließen wir ein weiteres Kriterium an, welches dazu verwendet werden kann, um aus einer Optimallösung des Primalen eine Optimallösung des Dualen zu konstruieren und umgekehrt:

Satz 5.3 (Komplementärer Schlupf) *Gegeben sei ein primales lineares Programm (17) sowie das zugehörige duale lineare Programm (18). Weiter sei x zulässig für das Primale und y zulässig für das Duale. Dann gilt*

$$x^\top \cdot (A^\top \cdot y - c) \;=\; 0$$

genau dann, wenn x eine Optimallösung des Primalen und y eine Optimallösung des Dualen ist.

!

Die gesamte Theorie aus diesem Abschnitt können wir nutzen, um eine weitere Simplex-Variante vorzustellen.

6 Duales Simplex-Verfahren

In Abschn. 4 haben wir das primale Simplex-Verfahren im Detail hergeleitet: Das Verfahren startet mit einer Basis, dessen zugehörige Basislösung zulässig ist. Das Optimalitätskriterium (6) ist damit im Allgemeinen aber nicht erfüllt. Anschließend wird von Schritt zu Schritt ein Basiswechsel derart durchgeführt, dass der Zielfunktionswert kleiner wird, wir jedoch weiterhin eine zulässige Basislösung beibehalten. Das Verfahren terminiert, sobald das Optimalitätskriterium erfüllt ist.

Im Vergleich dazu ist die grundlegende Idee des dualen Simplex-Verfahrens nun folgende: Das Verfahren startet mit einer Basis, welche das Optimalitätskriterium (6) erfüllt. Die zugehörige Basislösung ist damit im Allgemeinen aber nicht zulässig. Anschließend wird von Schritt zu Schritt ein Basiswechsel derart durchgeführt, dass der Zielfunktionswert größer wird, wir jedoch weiterhin das Optimalitätskriterium erfüllen. Das Verfahren terminiert, sobald die Basislösung zulässig ist. Die Korrektheit des Verfahrens wird dabei aufgrund der starken Dualität sichergestellt.

Eine ähnliche Herleitung wir beim primalen Simplex-Verfahren führt zu folgendem dualen Basiswechsel. Zum besseren Verständnis wiederholen wir, dass das Simplex-Tableau zu einer Basis B gegeben ist durch

$$\begin{aligned} S_B \;&=\; T_B^{-1} \cdot T \\ &=\; \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & c^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A & -c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot b \\ \hline 0 & A_B^{-1} \cdot A & A_B^{-1} \cdot b \end{array}\right) \;=\; \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & h_B & -c_B^\top \cdot x_B \\ \hline 0 & E_B & d_B \end{array}\right), \end{aligned}$$

wobei wie zuvor die Notationen

$$d_B \;=\; x_B \;=\; A_B^{-1} \cdot b, \quad E_B \;=\; A_B^{-1} \cdot A \quad \text{und} \quad h_B \;=\; c^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A$$

verwendet wurden. Während beim primalen Simplex-Verfahren stets $d_B \geq 0$ gilt, fordern wir beim dualen Simplex-Verfahren stets $h_B \geq 0$.

Satz 6.1 (Dualer Basiswechsel) *Gegeben sei ein lineares Programm*

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \;=\; b \quad \text{und} \quad x \;\geq\; 0$$

mit $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, *mit* $b \in \mathbb{R}^m$ *sowie mit* $A = (a_1 \;\cdots\; a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. *Dabei gelte* $n \geq m$ *und der Rang von* A *sei gleich* m. *Weiterhin sei* B *eine Basis von* A, *dessen Basislösung das Optimalitätskriterium (6) erfüllt. Darüber hinaus definieren wir*

$$\begin{aligned} d_B &= (d_1, \ldots, d_m) \;=\; A_B^{-1} \cdot b \;\in\; \mathbb{R}^m, \\ h_B &= (h_1, \ldots, h_n) \;=\; c^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A \;\in\; \mathbb{R}^n, \\ E_B &= (e_{i,j}) \;=\; A_B^{-1} \cdot A \;\in\; \mathbb{R}^{m \times n}. \end{aligned}$$

Dabei gilt nach Voraussetzung stets $h_B \geq 0$ *gilt. Wähle nun ein* $r \in \{1, \ldots, m\}$ *mit*

$$d_r \;<\; 0 \tag{19}$$

sowie ein $s \in \{1, \ldots, n\}$ *mit*

$$-\frac{h_s}{e_{r,s}} \;=\; \min\left\{ -\frac{h_j}{e_{r,j}} \;:\; j = 1, \ldots, n \text{ mit } e_{r,j} < 0 \right\}. \tag{20}$$

Dann ist s *in der Nichtbasis* N *enthalten. Wenn wir* s *mit dem* r*-ten Element der Basis austauschen, dann erhalten wir eine neue Basis, dessen Basislösung das Optimalitätskriterium (6) erfüllt und den Zielfunktionswert um*

$$h_s \cdot \frac{d_r}{e_{r,s}} \;\geq\; 0$$

vergrößert.

Das folgende Beispiel demonstriert den dualen Basiswechsel am gleichen linearen Programm wie in den Beispielen zum primalen Simplex-Verfahren:

Beispiel 6.1 *Gegeben sei der Kostenvektor* $c = (3, -5, 0, 2, 1) \in \mathbb{R}^5$ *sowie die Matrix*

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^{3 \times 5}$$

und der Vektor $b = (-6, 9, -3) \in \mathbb{R}^3$. *Unter Verwendung der Basis* $B = (1, 3, 2)$

erhalten wir das Simplex-Tableau

$$S_{(1,3,2)} = \left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 13 & 1 & 81 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & \frac{1}{3} & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right).$$

Die Basislösung zur Basis $B = (1,3,2)$ *erfüllt somit das Optimalitätskriterium, da in der ersten Zeile* $h_B \geq 0$ *gilt. Die Basislösung ist aber nicht zulässig, sodass wir den dualen Basiswechsel anwenden können.*

Aufgrund der -12 *sowie der* -2 *sind die Bedingungen des dualen Basiswechsels mit* $r = 1$ *und* $s = 4$ *eindeutig erfüllt, sodass wir* $B = (4,3,2)$ *als neue Basis erhalten. Dies bedeutet, dass wir die entsprechende Spalte von* $S_{(1,3,2)}$ *durch Anwendung elementarer Zeilenoperationen in den entsprechenden Einheitsvektor überführen müssen. Wir erhalten*

$$S_{(4,3,2)} = \left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & \frac{13}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Nun ist nicht nur das Optimalitätskriterium erfüllt, die Basislösung

$$x = (0,\ 3,\ 8,\ 6,\ 0)$$

zur Basis $B = (4,3,2)$ *ist auch zulässig, sodass wir eine Optimallösung mit dem Zielfunktionswert* -3 *gefunden haben. Die Ergebnisse decken sich mit den Beispielen zuvor.*

Aufgabe 6.1 Zeige, dass der duale Basiswechsel aus dem Beispiel zuvor tatsächlich wie im Satz behauptet eine Vergrößerung des Zielfunktionswertes um

$$h_s \cdot \frac{d_r}{e_{r,s}} \geq 0$$

mit sich führt.

?

Falls im dualen Basiswechsel kein $r \in \{1, \ldots, m\}$ existiert, welches Gl. (19) erfüllt, so ist nicht nur das Optimalitätskriterium erfüllt, die zugehörige Basislösung ist auch zulässig und damit ist eine Optimallösung des linearen Programms gefunden. Was aber passiert, wenn ein $r \in \{1, \ldots, m\}$ existiert, welches Gl. (19) erfüllt, dann aber $e_{r,j} \geq 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt, sodass kein $s \in \{1, \ldots, n\}$ existiert, welches Gl. (20) erfüllt? In diesem Falle ist das vorliegende lineare Optimierungsproblem unzulässig, da die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{n} e_{r,j} \cdot x_j \;=\; d_r \;<\; 0$$

für kein $x \geq 0$ erfüllt ist. Dieses Ergebnis fassen wir zusammen:

!

Satz 6.2 *Es seien die gleichen Voraussetzungen und Notationen wie in Satz 6.1 zum dualen Basiswechsel gegeben. Angenommen, es gibt ein $r \in \{1, \ldots, m\}$ mit $d_r < 0$ und es gilt $e_{r,j} \geq 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$.*

Dann ist das zugehörige (primale) lineare Programm unzulässig.

Mit den bislang erzielten Ergebnissen können wir die grundlegende Idee des dualen Simplex-Verfahrens zur Lösung von linearen Programmen in Standardform verdeutlichen: Angenommen, es ist eine Basis bekannt, dessen Basislösung das Optimalitätskriterium erfüllt (aber nicht notwendiger Weise zulässig ist). Dann führen wir solange einen dualen Basiswechsel durch, bis wir eine zulässige Basislösung und damit eine Optimallösung erhalten, oder herausfinden, dass das Problem unzulässig ist.

Offen ist die Frage, was für ein $r \in \{1, \ldots, m\}$ bzw. was für ein $s \in \{1, \ldots, n\}$ gewählt werden soll, falls es mehrere Indizes gibt, welche die Bedingungen (20) bzw. (19) erfüllen. Hierzu sind unterschiedliche Pivotregeln mit unterschiedlichen Vor- und Nachteilen analog zum primalen Simplex-Verfahren möglich, sodass wir darauf nicht mehr im Detail eingehen wollen.

Weiterhin bemerken wir, dass das primale Simplex-Verfahren aus Zusammenfassung 4.1 mit einer zulässigen Basislösung startet, sodass das lineare Programm zulässig sein muss. Erst während des Verfahrens wird herausgefunden, ob das lineare Programm beschränkt ist oder nicht. Im Vergleich dazu startet das duale Simplex-Verfahren mit einer Basis, dessen Basislösung das Optimalitätskriterium erfüllt, sodass das lineare Programm beschränkt sein muss. Erst während des Verfahrens wird herausgefunden, ob das lineare Programm zulässig ist oder nicht.

#

Zusammenfassung 6.1 (Duales Simplex-Verfahren) Gegeben sei ein lineares Programm in Standardform, d.h.

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \;=\; b \quad \text{und} \quad x \;\geq\; 0$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, mit $b \in \mathbb{R}^m$ sowie mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dabei gelte $n \geq m$ und der Rang von A sei gleich m. Weiterhin sei B eine Basis von A, dessen Basislösung das Optimalitätskriterium (6) erfüllt.

(1) Prüfe, ob die Basislösung der aktuellen Basis B zulässig ist. Falls ja, so terminiert das Verfahren und die Basislösung der aktuellen Basis ist eine Optimallösung des linearen Programms.

(2) Prüfe unter Verwendung von Satz 6.2, ob das lineare Programm unzulässig ist. Falls ja, so terminiert das Verfahren mit der Aussage, dass das lineare Programm unzulässig ist.

(3) Führe einen dualen Basiswechsel unter Verwendung einer geeigneten Pivotregel durch (Satz 6.1). Genauer tauschen wir einen Index zwischen Basis und Nichtbasis aus und erhalten eine neue Basis B, dessen Basislösung weiterhin das Optimalitätskriterium (6) erfüllt.

(4) Gehe zurück zu Schritt **(1)**.

Dabei sind unterschiedliche Pivotregel analog zum primalen Simplex-Verfahren möglich.

Wieder stellt sich die Frage, wie eine geeignete Ausgangsbasis B gefunden werden kann. Als Spezialfall erhalten wir folgendes Ergebnis für stets beschränkte lineare Programme mit Ungleichungen als Nebenbedingungen:

Lemma 6.3 *Gegeben sei ein* ***Ausgangsproblem***

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \leq b \quad \text{und} \quad x \geq 0 \tag{21}$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, mit $b \in \mathbb{R}^m$ sowie mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Weiterhin setzen wir voraus, dass $c \geq 0$ gilt. Als zugehöriges lineares Programm in Standardform definieren wir das ***Hilfsproblem***

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x + I_m \cdot z = b \quad \text{und} \quad x, z \geq 0. \tag{22}$$

Dabei sei I_m die $(m \times m)$-Einheitsmatrix. Dann ist

$$B = (n+1, n+2, \ldots, n+m)$$

eine zugehörige Basis, dessen Basislösung das Optimalitätskriterium (6) erfüllt. Somit kann das Hilfsproblem (22) und damit auch das Ausgangsproblem mit dem dualen Simplex-Verfahren aus Zusammenfassung 6.1 gelöst werden.

Aber wie kann im Allgemeinen eine geeignete Ausgangsbasis B gefunden werden (bzw. wie kann entschieden werden, ob das lineare Programm überhaupt beschränkt ist)? Auch diese Frage kann unter Verwendung eines Hilfsproblems beantwortet werden, was wir im folgenden Ausblick skizzieren wollen, s. auch Koberstein und Suhl (2007):

Ausblick *Gegeben sei ein lineares Programm in Standardform, d.h.*

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \;=\; b \quad \text{und} \quad x \;\geq\; 0$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$*, mit* $b \in \mathbb{R}^m$ *sowie mit* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$*. Dabei gelte* $n \geq m$ *und der Rang von* A *sei gleich* m*. Gesucht ist eine Basis* B*, sodass*

$$h_B \;=\; c^\top - c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A \;\geq\; 0$$

gilt. Unter Verwendung der Notation $y^\top = c_B^\top \cdot A_B^{-1}$ *wie im Abschnitt zuvor suchen wir zunächst einen Vektor* $y \in \mathbb{R}^m$ *mit*

$$c^\top - y^\top \cdot A \;\geq\; 0. \tag{23}$$

Diese Ungleichung können wir auch schreiben als

$$y^\top \cdot A + z^\top \cdot I_n \;=\; c^\top,$$

wobei I_n *die* $(n \times n)$*-Einheitsmatrix sei und* $z \in \mathbb{R}^n$ *mit* $z \geq 0$ *gelte. Um zu prüfen, ob diese Gleichung eine Lösung hat, formulieren wir das Hilfsproblem*

$$\max e^\top \cdot u, \qquad \text{sodass} \qquad y^\top \cdot A + z^\top \cdot I_n + u^\top \cdot I_n \;=\; c^\top$$

mit $y \lesseqgtr 0$*,* $z \geq 0$*,* $u \leq 0$*, wobei* $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ *gelte. Dieses lineare Optimierungsproblem ist aufgrund von* $u \leq 0$ *beschränkt und es ist auch zulässig, dann mit* $z + u = c$ *können wir stets eine zulässige Lösung wählen. Weiterhin stellen wir fest, dass (23) genau dann eine Lösung* $y \in \mathbb{R}^m$ *besitzt, falls der Zielfunktionswert einer Optimallösung des Hilfsproblems gleich* 0 *ist.*

Das Duale des zuvor definierten Hilfsproblems lautet

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \;=\; 0, \;\; I_n \cdot x \;\geq\; 0, \;\; I_n \cdot x \;\leq\; e$$

mit $x \lesseqgtr 0$*. Dieses Problem können wir auch formulieren als*

$$\min c^\top \cdot x, \qquad \text{sodass} \qquad A \cdot x \;=\; 0 \quad \text{und} \quad 0 \;\leq\; x \;\leq\; e, \tag{24}$$

wobei das Problem offensichtlich beschränkt und zulässig ist, sodass eine Basislösung existiert, welche eine Optimallösung des Problems ist. Aufgrund der starken Dualität sowie der Herleitung zuvor wissen wir zudem, dass (23) genau dann eine Lösung $y \in \mathbb{R}^m$ *besitzt, wenn der Zielfunktionswert einer Optimallösung des Hilfsproblems (24) gleich* 0 *ist. Ist der Zielfunktionswert einer Optimallösung von (24) hingegen kleiner als* 0*, dann besitzt (23) keine Lösung und folglich ist das ursprüngliche lineare Programm unbeschränkt, da das Optimalitätskriterium für keine Basis erfüllt sein kann.*

Weiterhin sei bemerkt, dass spezielle Simplex-Varianten insbesondere lineare Programme mit beschränkten Variablen effizient lösen können, sodass sich auch das Hilfsproblems (24) ohne Einführung unnötig vieler Schlupfvariablen lösen lässt. Weiterhin kann die Basis B, welche zu einer Optimallösung von (24) führt, auch als Ausgangsbasis zur Anwendung des dualen Simplex-Verfahrens aus Zusammenfassung 6.1 verwendet werden, denn die zugehörige Basislösung von B erfüllt das Optimalitätskriterium (6).

Wir beenden dieses Kapitel mit einem Beispiel, welches unter Anwendung von Lemma 6.3 direkt mit dem dualen Simplex-Verfahren aus Zusammenfassung 6.1 gelöst werden kann:

Beispiel 6.2 *Als explizites Anwendungsbeispiel von linearen Ausgleichsproblemen (Beispiel 1.3) untersuchen wir die* ***lineare Regression****. Gegeben seien m Messpunkte*

$$m_i \;=\; (u_i,\, z_i) \;\in\; \mathbb{R}^2 \qquad \text{für } i = 1, \ldots, m.$$

Dabei sei bekannt, dass die Messpunkte (theoretisch) alle auf einer Geraden

$$f(x) \;=\; w \cdot x + e$$

liegen. Aufgrund von Messfehlern ist dies allerdings nur theoretisch der Fall, praktisch sind alle Messpunkte fehlerbehaftet. Man möchte daher die Steigung w und den Achsenabschnitt e derart bestimmen, sodass

$$\max\left\{\Big|f(u_i) - z_i\Big| \;:\; i = 1, \ldots, m\right\} \;=\; \max\left\{\Big|w \cdot u_i + e - z_i\Big| \;:\; i = 1, \ldots, m\right\}$$

minimiert wird. Unter Verwendung des Vektors $b = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m$ sowie der Matrix

$$A \;=\; \begin{pmatrix} u_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ u_m & 1 \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^{m \times 2}$$

erhalten wir schließlich das lineare Ausgleichsproblem

$$\min\; \|A \cdot x - b\|_\infty, \qquad \text{sodass} \qquad x \;=\; (w, e) \;\in\; \mathbb{R}^2,$$

welches wir wie in Beispiel 1.3 beschrieben als lineares Programm formulieren können:

$$\begin{array}{llrcll} \min\; t, & \text{sodass} & u_i \cdot w + e - t & \leq & z_i & \text{für alle } i \in \{1, \ldots, m\} \\ & & u_i \cdot w + e + t & \geq & z_i & \text{für alle } i \in \{1, \ldots, m\} \\ & & w, e & \lesseqgtr & 0 & \\ & & t & \geq & 0. & \end{array}$$

Dieses lineare Programm kann auf die übliche Art und Weise derart formuliert werden, sodass es in der aus Lemma 6.3 geforderten Form vorliegt und daher mit dem dualen Simplex-Verfahren aus Zusammenfassung 6.1 gelöst werden kann.

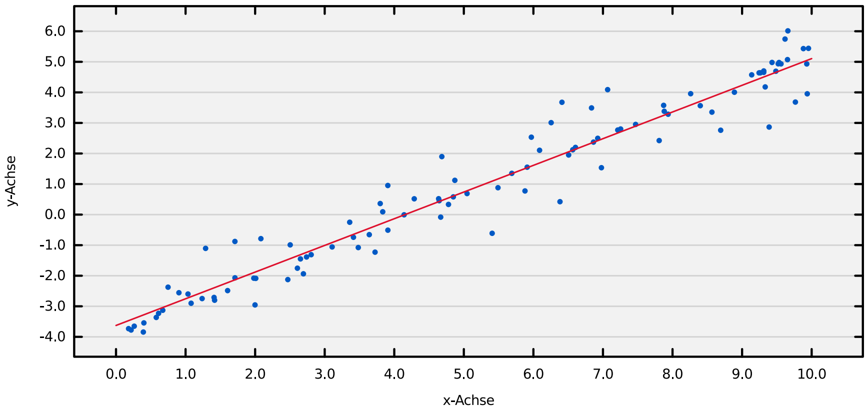


Abb. 4 Beispiel zur linearen Regression mit $m = 100$ Messpunkten (blau), wobei zufällige Messfehler generiert wurden. Die Lösung (rot) wurde unter Verwendung des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems berechnet

Abb. 4 zeigt ein Beispiel mit $m = 100$ Messpunkten, wobei zufällige Messfehler generiert wurden. Die Lösung des zugehörigen Ausgleichsproblems liefert schließlich die gesuchte Lösung der linearen Regression.

Weitere Analyse zeigen, dass sich lineare Programme zur Lösung von Ausgleichsproblemen im Vergleich zum primalen Simplex-Verfahren deutlich effizienter mit dem dualen Simplex-Verfahren lösen lassen. Um dies zu veranschaulichen, wurden zufällige Eingabedaten wie im Beispiel zuvor generiert, wobei die Anzahl m der Messpunkte variiert wurde. Die entsprechenden linearen Programme wurden einmal mit dem dualen und einmal mit dem primalen Simplex-Verfahren gelöst. Abb. 5 zeigt die Ergebnisse dieser Analyse: Das duale Simplex-Verfahren benötigt unabhängig von m jeweils nur etwa zehn Iterationen, während die Anzahl der Iterationen unter Verwendung des primalen Simplex-Verfahrens linear mit der Anzahl m der Messpunkte und somit linear mit der Anzahl der Variablen des linearen Programms zu wachsen scheint.

Aufgabe 6.2 Übertrage die lineare Regression aus dem Beispiel zuvor auf die Regression einer quadratischen Funktion

$$f(x) \;=\; z \cdot x^2 + w \cdot x + e.$$

Formuliere auch diesen Fall als lineares Programm.

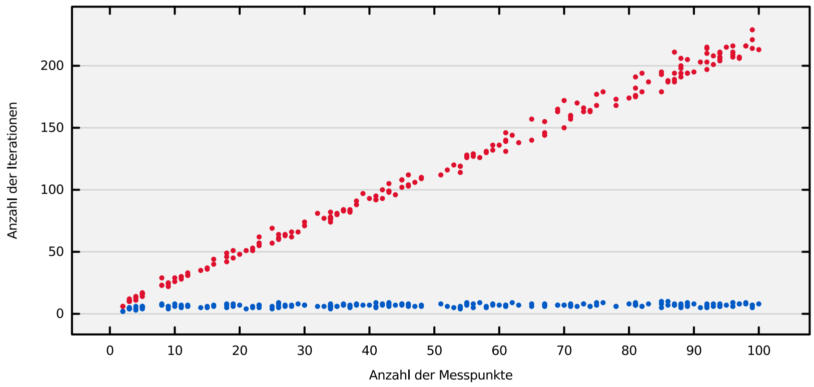


Abb. 5 Numerische Analyse zur Laufzeit des Simplex-Verfahrens. Aufgetragen sind die Anzahl der benötigten Iterationen des dualen Simplex-Verfahrens (blau) sowie des primalen Simplex-Verfahrens (rot, Summe aus Phase 1 und Phase 2) zur Lösung der linearen Ausgleichsprobleme, jeweils gegen die Anzahl m der zufällig generierten Messpunkte

Literatur

E.M.L. Beale. 1955. Cycling in the dual simplex algorithm. *Naval Research Logistics Quarterly*, **2**: 269–275.

R.G. Bland. 1977. New finite pivoting rules for the simplex method. *Mathematics of Operations Research*, **2**: 103–107.

K.-H. Borgwardt. 1982. The average number of pivot steps required by the simplex-method is polynomial. *Zeitschrift für Operations Research*, **26**: 157–177.

V. Chvátal, 1983. *Linear Programming*. W.H. Freeman and Company, New York, 1. Auflage.

W. Domschke, A. Drexl, R. Klein, A. Scholl, 2015. *Einführung in Operations Research*. Springer, Berlin, 9. Auflage.

H.W. Hamacher, K. Klamroth, 2006. *Lineare Optimierung und Netzwerkoptimierung*. Vieweg, Wiesbaden, 2. Auflage.

F. Jarre, J. Stoer, 2004. *Optimierung*. Springer, Berlin, 1. Auflage.

V. Klee, G.J. Minty. 1972. How good is the simplex algorithm? *Inequalities*, **3**: 159–175.

A. Koberstein, U.H. Suhl. 2007. Progress in the dual simplex algorithm for solving large scale LP problems: practical dual phase 1 algorithms. *Computational Optimization and Applications*, **37**: 49–65.