Daniel Scholz · www.taramath.de · daniel@taramath.de · 25. Mai 2016

Singulärwertzerlegung

Wir kennen bereits Eigenwerte von quadratischen Matrizen und wissen, dass diese die zugehörige lineare Abbildung charakterisieren. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Singulärwerten von beliebigen Matrizen, welche wiederum wichtige Eigenschaften der Matrix sind. Wie beginnen in Abschn. 1 mit der Definition einer Singulärwertzerlegung sowie Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit. Weiterhin leiten wir bereits ein Verfahren zur Berechnung einer Singulärwertzerlegung her, welches sich jedoch unter Verwendung einer Bidiagonalisierung signifikant verbessern lässt (Abschn. 2). In Abschn. 3 fassen wir das Verfahren nochmals ausführlich zusammen, präsentieren ein Beispiel und untersuchen die numerische Komplexität des Algorithmus. Schließlich zeigen wir in Abschn. 4 als Anwendungsbeispiel, wie die Singulärwertzerlegung in der Bildkompression angewandt werden kann.

1 Grundlagen

Alle Grundlagen zu diesem Kapitel können beispielsweise in Golub und Van Loan (1996) vertieft werden. Darin können auch detailreiche Beschreibungen von Verfahren nachgelesen werden, welche eine noch effizientere sowie numerisch stabilere Berechnung der Singulärwertzerlegung ermöglichen. Wir beginnen zunächst mit der grundlegenden Definition dieses Kapitels:

Definition 1.1 *Eine Faktorisierung einer beliebigen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ der Form*

$$A = U \cdot S \cdot V$$

mit orthogonalen Matrizen $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie mit einer Diagonalmatrix

$$S \;=\; \begin{pmatrix} s_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & s_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^{m\times n}$$

heißt ***Singulärwertzerlegung*** *von A. Dabei gelte $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_r > 0$, und die Zahlen s_1 bis s_r werden als* ***Singulärwerte*** *von A bezeichnet.*

Die Matrix S besitzt somit genau r von null verschiedene Einträge, die alle positiv und der Größe nach geordnet sind. Wir schließen direkt Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit an:

!

Satz 1.1 (Existenz einer Singulärwertzerlegung) *Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ besitzt eine Singulärwertzerlegung.*

Neben der erfreulichen Existenzaussage kann jedoch nicht mit einer eindeutigen Zerlegung gerechnet werden. Nach der obigen Definition sind jedoch die Singulärwerte an sich eindeutig:

!

Satz 1.2 (Eindeutigkeit der Singulärwerte) *Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und sei*

$$A \;=\; U \cdot S \cdot V$$

eine Singulärwertzerlegung von A. Dann sind die Singulärwerte von A und damit die Matrix S eindeutig bestimmt (die orthogonalen Matrizen U und V sind jedoch nicht eindeutig bestimmt).

Die Singulärwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ haben einen engen Bezug zu den Eigenwerten von symmetrischen Matrizen. Genauer sind alle von null verschiedenen Eigenwerte der symmetrischen und positiv semidefiniten Matrizen

$$A^\top \cdot A \;\in\; \mathbb{R}^{n\times n} \qquad \text{sowie} \qquad A \cdot A^\top \;\in\; \mathbb{R}^{m\times m}$$

identisch, und diese sind insbesondere die Quadrate der Singulärwerte von A. Ein Beweis dieser Aussage kann beispielsweise in Hanke-Bourgeois (2009) nachgeschlagen werden. Genau diese Beobachtungen liefern uns nun die grundlegende Idee zur Berechnung einer Singulärwertzerlegung: